Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der

Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Klaus Diekmann
Bochum

1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544719_0008

Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der

Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Klaus Diekmann

Bochum

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am 17. Dezember 1980

Tag der mündlichen Prüfung am 4. Februar 1981

Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen

Korreferent: Prof. Dr. techn. K.H. Fasol

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr - Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die wertvollen Anregungen, die zahlreichen Diskussionen und die großzügige Förderung während der Durchführung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.techn. K.H. Fasol gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichts.

Mein Dank gilt auch allen meinen Kollegen, die mir Gelegenheit gaben zu zahlreichen fruchtbaren Diskussionen und Gesprächen. Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Frau P. Kiesel und Frl. H. Vollbrecht für die schnelle und sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes.

Bochum, im April 1981

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Das Mehrgrössenmodell	6
2.1. Das Gesamtmodell (Modellansatz I)	7
2.2. Das Teilmodell (Modellansatz II)	10
2.3. Das Einzelmodell (Modellansatz III)	16
3. Die Mehrgrössenidentifikation	20
3.1. Die Numerik der Parameterschätzverfahren	21
3.1.1 Die Parameterschätzung bei Verwendung des Modellansatzes II	21
3.1.2 Die Parameterschätzung bei Verwendung des Modellansatzes III	25
3.2. Anwendungsmöglichkeiten und Leistungsfähigkeit der Modellansätze II und III	30
3.2.1 Die untersuchten Mehrgrößensysteme	31
3.2.2 Die Identifikation mit dem Modellansatz II	34
3.2.3 Die Identifikation mit dem Modellansatz III	39
4. Die Identifikation mit Einzelmodellen	43
4.1. Die Mehrgrößenidentifikation mit unterschiedlichen Abtastzeiten	43
4.2. Die Mehrgrößenidentifikation mit mehreren Wichtungsfaktoren	49
4.3. Die Identifikation eines zeitvarianten Einzelsystems innerhalb eines Mehrgrößensystems	50

5. Die Strukturprüfung von Mehrgrössensystemen 57

5.1. Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnung 59

5.1.1 Der Determinantenverhältnistest (DR) 59
5.1.2 Der erweiterte Determinantenverhältnistest (EDR) 60
5.1.3 Der Instrumentelle Determinantenverhältnistest (IDR) 60
5.1.4 Der DR-Test für Mehrgrößensysteme von Guidorzi (MDR) 61

5.2. Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung beurteilen 63

5.2.1 Der Signalfehlertest 63
5.2.2 Der Verlustfunktionstest 64
5.2.3 Der statistische F-Test 65
5.2.4 Der Final Prediction Error-Test (FPE) 65

5.3. Verfahren zur Beurteilung der geschätzten Parameter 66

5.3.1 Der Polynom-Test 66

5.4. Vergleich der Strukturprüfverfahren 67

5.4.1 Der untersuchte Prozeß 67
5.4.2 Leistungsfähigkeit der Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnung 68
5.4.3 Leistungsfähigkeit der Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung bewerten 71
5.4.4 Leistungsfähigkeit des Polynomtestes 76
5.4.5 Zusammenfassende Bewertung 80

6. Die Identifikation eines Hochofens 81

6.1. Der Mehrgrößenmodellentwurf 82

6.2. Versuchsbedingungen und Versuchsauswertung 85

6.2.1 Die Systemidentifikation mit Hilfe des Modellansatzes II 85

6.2.2 Die Parameteridentifikation mit Hilfe des Modellansatzes III 87

7. ZUSAMMENFASSUNG 90

Literaturverzeichnis 93

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen 97

Anhang A Nicht rekursive und rekursive Form der Schätzgleichungen 99

A 1 Die Schätzgleichungen der LS- und der 3.EM-Methode 99

A 2 Die Schätzgleichungen der IV-Methode 102

Anhang B Der Berechnungsalgorithmus von Ljung, Morf und Falconer 105

1. Einleitung

Die Entwicklung der Prozeßrechentechnik führte in den vergangenen Jahren zu einem vermehrten Einsatz von Rechnern zur Regelung, Steuerung und Überwachung technischer Anlagen. Neben der Realisierung moderner Steuer- und Regelverfahren zur optimalen Prozeßführung erlaubt der Prozeßrechner auch eine ständige Analyse oder Identifikation des Prozeßverhaltens anhand der Ein- und Ausgangssignale des Systems. Das Ergebnis einer derartigen *Prozeßidentifikation* ist i.a. *ein mathematisches Modell*, das den Prozeß hinreichend genau bezüglich seines statischen und dynamischen Verhaltens beschreibt. Die Erstellung eines mathematischen Modells ist z.B. für den Entwurf von Regelalgorithmen und für die Simulation und Prädiktion des Prozeßverlaufes erforderlich.

In der Vergangenheit sind insbesondere für die Identifikation linearer Eingrößensysteme sehr leistungsfähige Parameterschätzverfahren entwickelt worden, deren Anwendbarkeit an zahlreichen realen Prozessen erprobt wurde (Åstroem (1971), Unbehauen (1974a)). Ziel dieser Arbeit ist es, die Möglichkeiten der *Identifikation von Mehrgrößensystemen* aufzuzeigen und dabei auf die spezielle Problematik der Strukturbestimmung hinzuweisen.

Die Entwicklung von Parameterschätzverfahren zur Prozeßidentifikation begann etwa im Jahre 1964 und beschäftigte sich zunächst mit linearen, zeitinvarianten Eingrößensystemen (Systeme mit einer Ein- und einer Ausgangsgröße). Es wurden zahlreiche Schätzverfahren vorgeschlagen, von denen sich jedoch nur einige, wie z.B. die Least Squares (LS)-, die Maximum Likelihood (ML)-, die 3.Erweiterte Matrizen (3.EM)- und die Instrumentelle Variablen (IV)-Methode, bei der Anwendung an realen Prozessen bewährt haben (Bauer (1977)).

Untersuchungen zur Anwendbarkeit der Algorithmen bei der Identifikation von Mehrgrößensystemen (Systeme mit mehreren Ein- und

einer oder mehreren Ausgangsgrößen) begannen erst relativ spät. Da Mehrgrößensysteme in der modernen Regelungstechnik insbesondere bei Syntheseproblemen weitgehend im Zustandsraum beschrieben werden, benutzten die ersten Arbeiten diese Beschreibungsform auch für die Identifikation. Die grundlegenden Arbeiten gehen auf Gopinath (1969) und Budin (1971, 1972) zurück. Verbesserungen hierzu wurden von Gupta (1974) und Passeri (1972) vorgeschlagen. Diese Verfahren besitzen jedoch aufgrund des gewählten Modellansatzes zwei Nachteile: Sie lassen sich nicht in rekursiver Form verwenden, und sie können den Einfluß von auftretenden Störungen nicht berücksichtigen.

Bei der Erstellung eines Modells für eine Flugregelung verwandten Mehra (1970) und Schulz (1975) eine kanonische Zustandsraumbeschreibung und schätzten die Parameter mit einem modifizierten Maximum Likelihood-Verfahren. Diese Arbeiten zeigen jedoch, daß eine große Anzahl von Parametern und eine hohe Rechenzeit erforderlich sind.

Aus der allgemeinen Form der Zustandsraumbeschreibung läßt sich eine Matrix von Übertragungsfunktionen herleiten, die im folgenden als *Gesamtmodell* (Modellansatz I) bezeichnet wird. Unter Verwendung verschiedener Schätzverfahren haben Sen und Sinha (1976), Keviczky und Bányász (1976) und Goodwin, Payne und Kabaila (1976) Mehrgrößensysteme mit dem Gesamtmodell untersucht. Die Anzahl der zu schätzenden Parameter und die benötigte Rechenzeit sind jedoch nicht geringer als bei der Verwendung eines Zustandsraummodells.

Um diesen Nachteil zu umgehen, entwickelte Guidorzi (1975) einen speziellen Modellansatz. Er greift eine von Ackermann (1972) entwickelte parameterminimale Beschreibungsform auf, die man durch eine besondere Transformation aus der Beobachtbarkeitsnormalform der Zustandsraumbeschreibung erhält. Mit diesem Modellansatz wird eine Untergliederung des Gesamtmodells in *Teilmodelle* (Modellansatz II) ermöglicht. Guidorzi entwickelte für diesen Modell-

ansatz ein Strukturprüf- und Parameterschätzverfahren. Dieser Modellansatz II wird danach auch von Sinha und Kwong (1977) sowie von Gauthier und Landau (1978) mit Schätzverfahren, die sich für Eingrößensysteme bewährt haben, untersucht.

Die systematische Untersuchung über die Anwendbarkeit des Modellansatzes II für die Identifikation von Mehrgrößensystemen zeigte folgenden Nachteil: Wird ein Ausgangssignal von mehreren Eingangssignalen beeinflußt, so gibt es für den Schätzalgorithmus kein Kriterium, das entscheidet, wann das dynamische Verhalten der einzelnen Übertragungspfade untereinander identisch oder nur sehr ähnlich ist. Dies führt zu einer falschen Parameterschätzung, nicht jedoch zu einer falschen Simulation oder Prädiktion des Ausgangsverhaltens. Der Modellansatz II ist somit nur für eine *Systemidentifikation* geeignet, d.h. das Modell kann ausschließlich zur Simulation und zur Prädiktion des Ausgangssignals verwandt werden. Rückschlüsse auf den inneren Aufbau oder gar einzelne Parameter sind nicht möglich, so daß eine *Parameteridentifikation* scheitert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher der Entwurf eines Modellansatzes (Modellansatz III), der eine Parameteridentifikation von Mehrgrößensystemen ermöglicht. Es wird ein zweistufiges Schätzverfahren vorgeschlagen. In der ersten Stufe werden die Teilmodelle eines Gesamtmodells gemäß dem Modellansatz II geschätzt. Ist das Teilmodell bekannt, so können die Ausgangssignale jedes einzelnen Übertragungsgliedes des Teilmodells geschätzt werden. Verwendet man nun diese geschätzten Ausgangssignale und die zu dem Übertragungsglied gehörenden gemessenen Eingangssignale, so lassen sich mit der Eingrößensystemidentifikation die Übertragungsglieder der Teilmodelle bestimmen. Damit wird das Mehrgrößenmodell auf eine Parallelschaltung von Eingrößenmodellen *(Einzelmodellen)* reduziert. Da die Einzelmodelle unabhängig voneinander geschätzt werden, ist eine eindeutige Ermittlung aller dynamischen Anteile des Mehrgrößensystems möglich. Damit ist die Grundvoraussetzung für eine Parameteridentifikation gegeben. Die ver-

schiedenen Modellansätze und die darauf basierenden Identifikationsverfahren werden in den Kapiteln 2 und 3 besprochen.

Neben der Möglichkeit zur Parameteridentifikation besitzt der Modellansatz III weitere Vorteile:

- Die Parameter der Einzelmodelle liegen direkt als Schätzergebnis vor und müssen nicht erst durch eine zusätzliche Auswertung ermittelt werden, was insbesondere für rekursive Verfahren von Vorteil ist.

- Da die Identifikation der Übertragungsfunktionen untereinander unabhängig ist, kann für jedes Übertragungsglied eine eigene, optimale Abtastzeit gewählt werden. Dies ist insbesondere dann von großem Vorteil, wenn das dynamische Verhalten der einzelnen Übertragungsglieder sehr unterschiedlich ist.

- Konvergenzverbessernde Wichtungsmethoden lassen sich gezielt auf jedes Übertragungsglied anwenden.

- Es ist möglich, ein Mehrgrößensystem zu identifizieren, in dem die Parameter eines Übertragungsgliedes sich zeitvariant verhalten. Bei Verwendung des Modellansatzes II bewirkt das zeitvariante Verhalten eines Übertragungsgliedes, daß eine Änderung in allen Parametern des Teilmodells auftritt, so daß aufgrund der Komplexität eine Identifikation nicht möglich ist.

Diese Vorteile werden anhand von Beispielen in Kapitel 4 dargestellt.

Die richtige Strukturbestimmung ist eine wichtige Voraussetzung für die Identifikation von Mehrgrößensystemen. Es muß eine eindeutige Zuordnung von Ursache und Wirkung erfolgen, wobei die physikalischen Zusammenhänge durch Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Sofern die Ordnung nicht aus einer theoretischen Analyse bekannt ist, muß sie vor der Identifikation geschätzt werden. Zur Überprüfung einer solchen Schätzung wurden für die Iden-

tifikation von Eingrößensystemen Strukturprüfverfahren entwickelt. In Kapitel 5 werden verschiedene Verfahren, die sich bei der Identifikation von Eingrößensystemen bewährt haben, auf ihre Anwendbarkeit und ihre Leistungsfähigkeit bei der Mehrgrößenidentifikation untersucht. Die Ergebnisse werden anhand eines Testbeispiels dargestellt.

Im abschließenden Kapitel 6 wird die Mehrgrößenidentifikation an einem realen Prozeß untersucht. Dazu wurde der Hochofenprozeß ausgewählt, da er aufgrund seiner Komplexität sehr gut geeignet ist, die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Identifikation von Mehrgrößensystemen unter Verwendung des Teil- und des Einzelmodellansatzes aufzuzeigen.

2. Das Mehrgrößenmodell

Das Ziel der Identifikation ist die Erstellung eines mathematischen Modells, welches das dynamische und das statische Verhalten eines Prozesses möglichst genau beschreibt. Das Modell wird dabei parallel zum System angeordnet und mit den gleichen Eingangssignalen, welche im Vektor $\underline{u}$ zusammengefaßt sind, erregt (Bild 2.1).

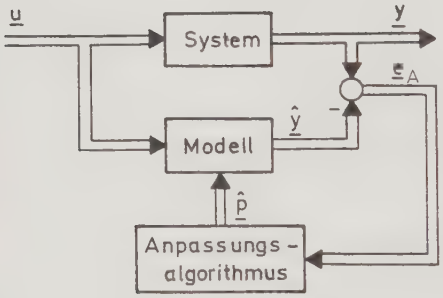


Bild 2.1. Der prinzipielle Aufbau der Identifikation von Mehrgrößensystemen

Die Ausgangsfehler, zusammengefaßt zum Zeitpunkt k im Vektor

$$\underline{e}_A(k) = \underline{y}(k) - \underline{\hat{y}}(k) \quad , \tag{2.1}$$

entstehen durch den Vergleich der Vektoren der gemessenen Ausgangssignale $\underline{y}(k)$ und der geschätzten Ausgangssignale $\underline{\hat{y}}(k)$. Die im Vektor $\underline{\hat{p}}$ zusammengefaßten, geschätzten Parameter des Modells werden über ein geeignetes Fehlerkriterium und einen Anpassungsvorgang bestimmt bzw. so korrigiert, daß das vorgegebene Kriterium

erfüllt wird. Um eine Linearität zwischen den Parametern und den Fehlern zu erhalten, dürfen in Gl.(2.1) keine gebrochen rationale Funktionen auftreten (Bauer, 1977). Dies wird dadurch erreicht, daß statt des Ausgangsfehlervektors $\underline{e}_A$ der sogenannte Gleichungsfehlervektor $\underline{e}$ für das Gütekriterium verwandt wird. Das Ziel bei der folgenden Behandlung verschiedener Modellansätze ist daher die Herleitung des Gleichungsfehlervektors.

Das Modell eines Mehrgrößensystems soll alle Zusammenhänge zwischen den Ein- und den Ausgangsgrößen und alle Kopplungen der Ausgangssignale untereinander beschreiben können. In dieser Arbeit werden drei Modellansätze vorgestellt, die eine systematische und vollständige Zuordnung von Ursache und Wirkung ermöglichen. Um eine möglichst übersichtliche Darstellung der verschiedenen Modellansätze zu erreichen, wird in diesem Kapitel nur das Modell für die Parameterschätzung mit der Least Squares-Methode behandelt. In Kapitel 3.1 wird dann bei der Besprechung der Numerik der Parameterschätzverfahren auch auf die 3. Erweiterte Matrizen-Methode und die Instrumentelle Variablen-Methode eingegangen.

2.1. Das Gesamtmodell (Modellansatz I)

Es soll das Modell eines linearen Mehrgrößensystems mit r Eingangsgrößen u_j und m Ausgangsgrößen $\hat{y}_i$ betrachtet werden (Bild 2.2).

Bild 2.2. Das Gesamtmodell eines linearen Mehrgrößensystems

Werden die Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen mit diskreten Übertragungsfunktionen beschrieben, so erhält man die vektorielle Beziehung

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1(z) \\ \vdots \\ \hat{Y}_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(z) & \dots & G_{mr}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_r(z) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

bzw. in zusammengefaßter Form zu

$$\underline{\hat{Y}}(z) = \underline{G}(z) \quad \underline{U}(z) \; . \tag{2.3}$$

Hierin sind

$$G_{ij}(z) = \frac{B_{ij}(z^{-1})}{A_{ij}(z^{-1})} = \frac{b_{1,ij}z^{-1} + \dots + b_{n_{ij},ij}z^{-n_{ij}}}{1 + a_{1,ij}z^{-1} + \dots + a_{n_{ij},ij}z^{-n_{ij}}} \tag{2.4}$$

die diskreten Übertragungsfunktionen vom Eingang j zum Ausgang i, wobei eine Normierung auf den Wert $a_{o,ij} = 1$ vorgenommen und nichtsprungfähige Systeme zugrundegelegt wurden. Die Berücksichtigung einer Totzeit $z^{-d_{ij}}$ ist ohne weitere Voraussetzungen möglich und ist hier nur aus Vereinfachungsgründen fortgelassen worden.

Die für den Identifikationsalgorithmus benötigte Herleitung des Vektors der Gleichungsfehler geschieht über die Berechnung des Ausgangsfehlervektors

$$\underline{E}_\Lambda(z) = \underline{Y}(z) - \underline{\hat{Y}}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_m(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1r}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(z) & \dots & G_{mr}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_r(z) \end{bmatrix} . \tag{2.5}$$

Zur Vermeidung der gebrochen rationalen Funktionen $G_{ij}(z)$ wird für die Herleitung des Gleichungsfehlervektors zunächst der gemeinsame Hauptnenner $A^*(z^{-1})$ aller Matrixelemente $G_{ij}(z)$ gebildet. Dieser lautet dann

$$A^*(z^{-1}) = \prod_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{\substack{m \\ r}} A_{ij}(z^{-1}) = 1 + a_1^* z^{-1} + \ldots + a_n^* z^{-n} , \qquad (2.6)$$

wobei die Ordnung n sich aus der Summe der Ordnungen n_{ij} der Übertragungsfunktionen $G_{ij}(z)$, also aus

$$n = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1}}^{\substack{m \\ r}} n_{ij} \qquad (2.7)$$

berechnet. Da vor der Identifikation die Pole nicht bekannt sind, kann eine Zusammenfassung zu gemeinsamen Polen nicht erfolgen. Mit dem Hauptnennerpolynom und den erweiterten Zählerpolynomen

$$B_{ij}^*(z^{-1}) = \frac{B_{ij}(z^{-1})}{A_{ij}(z^{-1})} A^*(z^{-1}) = b_{1,ij}^* z^{-1} + \ldots + b_{n,ij}^* z^{-n}, \qquad (2.8)$$

die ebenfalls die Ordnung n besitzen, erhält man nun den Ausgangsfehlervektor zu

$$\underline{E}_A(z) = \underline{Y}(z) - \frac{1}{A^*(z^{-1})} \begin{bmatrix} B_{11}^*(z^{-1}) & \ldots & B_{1r}^*(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1}^*(z^{-1}) & \ldots & B_{mr}^*(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_r(z) \end{bmatrix} . \qquad (2.9)$$

Hieraus folgt nach einer Multiplikation mit $A^*(z^{-1})$ der folgendermaßen definierte Vektor der Gleichungsfehler

$$\begin{bmatrix} E_1(z) \\ \vdots \\ E_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*(z^{-1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^*(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_m(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B^*_{11}(z^{-1}) & \dots & B^*_{1r}(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ B^*_{m1}(z^{-1}) & \dots & B^*_{mr}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(z \\ \vdots \\ U_r(z \end{bmatrix}$$

(2.10)

In dem nachfolgenden Schritt zur Herleitung der eigentlichen Schätzgleichungen wird dieser Gleichungsfehler bei der Aufstellung des Gütekriteriums verwandt. Die Anzahl der in Gl.(2.10) zu schätzenden Parameter ist aufgrund der in allen Polynomen enthaltenen hohen Ordnung n sehr groß und berechnet sich zu

$$S_I = (m \cdot r + 1) \cdot n \ . \qquad (2.11)$$

Dieser Modellansatz wurde von Sen und Sinha (1976), Keviczky und Banyasz (1976) und Goodwin, Payne und Kabaila (1976) untersucht, wobei verschiedene Schätzverfahren angewandt wurden. Die Arbeiten zeigen deutlich, daß aufgrund der hohen Anzahl der zu schätzenden Parameter nur Mehrgrößensysteme mit einer kleinen Zahl von Ein- und Ausgängen und einer niedrigen Ordnung n zu identifizieren sind. Diesem erheblichen Nachteil stehen keine Vorteile gegenüber, so daß der Modellansatz I bei den weiteren Betrachtungen nicht berücksichtigt werden soll.

2.2. Das Teilmodell (Modellansatz II)

Um eine Reduzierung der Anzahl der zu schätzenden Parameter zu erreichen, kann das komplexe Gesamtmodell in unabhängige Teilmodelle mit jeweils einer Ausgangsgröße gegliedert werden (Bild 2.3).

Der Aufbau und die Gliederung der Teilmodelle werden durch folgende Definitionen festgelegt:

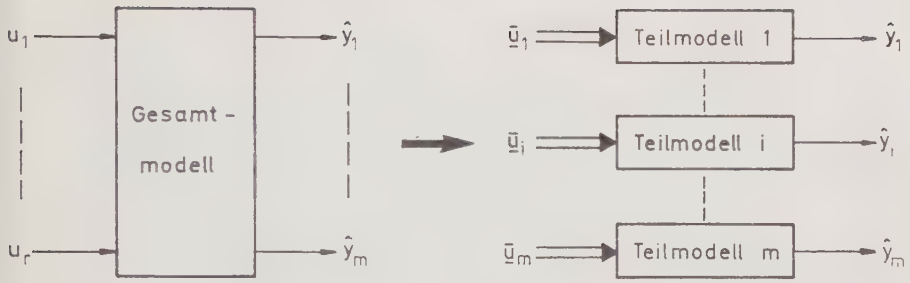


Bild 2.3. Die Aufteilung des Gesamtmodells in Teilmodelle

Anzahl der Teilmodelle: Die Anzahl der Teilmodelle ist kleiner oder gleich der Anzahl der meßbaren Ausgänge. Sie kann nur dann größer sein, wenn zwei oder mehrere Ausgänge zu einem neuen Ausgang zusammengefaßt werden (wobei es sich um eine redundante Information handelt) oder wenn nicht meßbare Ausgangssignale geschätzt werden. Bei den folgenden Betrachtungen werden stets m Teilmodelle angenommen.

Teilmodelleingänge: Das Teilmodell i besitzt den Eingangsvektor

$$\underline{\bar{u}}_i^T = \left[\bar{u}_{i1}, \bar{u}_{i2}, \ldots, \bar{u}_{ir_i} \right] . \qquad (2.12)$$

Als Eingänge $\bar{u}_{ij}$ der Teilmodelle können

- die Systemeingänge u_ℓ, $\ell = 1, \ldots, r$ und
- die anderen Teilmodellausgänge $\hat{y}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$

auftreten. Damit läßt sich die Abhängigkeitsfunktion

$$\hat{y}_i = f(u_1, \ldots, u_r, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{i-1}, \hat{y}_{i+1}, \ldots, \hat{y}_m) \qquad (2.13)$$

aufstellen, so daß die maximale Anzahl der Eingänge

$$r_i = r + m - 1 \tag{2.14}$$

ist. Die als Eingangsgrößen verwendeten Ausgänge der anderen Teilmodelle können in Bezug auf ihre Kausalität auf die Systemeingangssignale $\underline{u}$ zurückgeführt werden. Damit könnte eine Abhängigkeit der Teilmodelle allein von den Systemeingängen erzeugt werden. Diese Rückführung auf die alleinige Abhängigkeit von den Systemeingangsgrößen ist jedoch dann zu vermeiden, wenn ein direkter physikalischer Zusammenhang zwischen den Ausgängen zweier Teilmodelle dadurch unübersichtlich wird, oder wenn sich durch die Rückführung die Anzahl der zu schätzenden Parameter wesentlich erhöht.

Mit diesen beiden Definitionen sind eine Vielzahl von Aufbaumöglichkeiten des Teilmodells gegeben. So kann z. B. die von Mesarovic (1960) eingeführte P-kanonische Struktur (Bild 2.4) und die

Bild 2.4. Ein P-kanonisches Teilmodell

V-kanonische Struktur (Bild 2.5) realisiert werden. Auch die von Mesarovic als nicht-kanonisch bezeichneten Strukturen sind mit diesem Modellansatz beschreibbar.

Trotz der unterschiedlichen Aufbaumöglichkeiten kann für das Teilmodell eine einheitliche Herleitung der Gleichungsfehler erfolgen.

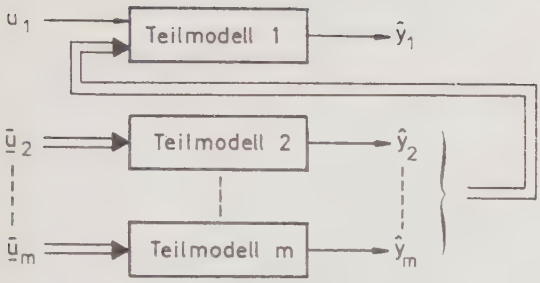


Bild 2.5. Ein V-kanonisches Teilmodell

Da die Teilmodelle voneinander unabhängig sind, wird die Herleitung im folgenden nur für das Teilmodell i durchgeführt.

Der Aufbau eines Teilmodells ist in Bild 2.6 wiedergegeben.

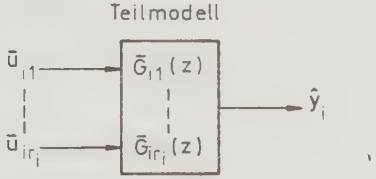


Bild 2.6. Allgemeiner Aufbau eines Teilmodells

Dabei sind $\bar{G}_{ij}(z)$ die Übertragungsfunktionen vom Teilmodelleingang $\bar{u}_{ij}$ zum Ausgang $\hat{y}_i$. Die Ausgangsgröße berechnet sich zu

$$\hat{Y}_i(z) = \left[\overline{G}_{i1}(z), \ldots, \overline{G}_{ir_i}(z)\right] \begin{bmatrix} \overline{U}_{i1}(z) \\ \vdots \\ \overline{U}_{ir_i}(z) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

bzw. in ausführlicher Form

$$\hat{Y}_i(z) = \left[\frac{\overline{B}_{i1}(z^{-1})}{\overline{A}_{i1}(z^{-1})}, \ldots, \frac{\overline{B}_{ir_i}(z^{-1})}{\overline{A}_{ir_i}(z^{-1})}\right] \begin{bmatrix} \overline{U}_{i1}(z) \\ \vdots \\ \overline{U}_{ir_i}(z) \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Um den Gleichungsfehler $E_i(z)$ zu erhalten, wird zunächst der Ausgangsfehler für das Teilmodell gebildet:

$$E_{A,i}(z) = Y_i(z) - \hat{Y}_i(z) = Y_i(z) - \left[\overline{G}_{i1}(z), \ldots, \overline{G}_{ir_i}(z)\right] \begin{bmatrix} \overline{U}_{i1}(z) \\ \vdots \\ \overline{U}_{ir_i}(z) \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Zur Vermeidung gebrochen rationaler Funktionen wird der gemeinsame Hauptnenner $A_i^*(z^{-1})$ der Übertragungsfunktionen $\overline{G}_{ij}(z)$ des betreffenden Teilmodells ermittelt. Dieser lautet:

$$A_i^*(z^{-1}) = \prod_{j=1}^{r_i} \overline{A}_{ij}(z^{-1}) = 1 + a^*_{1,i} z^{-1} + \ldots + a^*_{n_i,i} z^{-n_i} \tag{2.18}$$

wobei die Ordnung n_i die Summe der Ordnungen n_{ij}

$$n_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \tag{2.19}$$

ist. Die gleiche Ordnung besitzen dann auch die erweiterten Zählerpolynome

$$B^*_{ij}(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})} A^*_i(z^{-1}) = b^*_{1,ij} z^{-1} + \ldots + b^*_{n_i,ij} z^{-n_i} \quad . \tag{2.20}$$

Aus dem Ausgangsfehler

$$E_{A,i}(z) = Y_i(z) - \frac{1}{A^*_i(z^{-1})} \left[B^*_{i1}(z^{-1}), \ldots, B^*_{ir_i}(z^{-1}) \right] \underline{\bar{U}}_i(z) \tag{2.21}$$

erhält man nach Multiplikation mit $A^*_i(z^{-1})$ den gesuchten, wie folgt definierten Gleichungsfehler

$$E_i(z) = A^*_i(z^{-1})\ Y_i(z) - \left[B^*_{i1}(z^{-1}), \ldots, B^*_{ir_i}(z^{-1}) \right] \underline{\bar{U}}_i(z) . \tag{2.22}$$

Für ein Teilmodell sind somit $(r_i + 1)n_i$ Parameter zu schätzen, so daß für das in m Teilmodelle aufgeteilte Gesamtmodell insgesamt

$$S_{II} = \sum_{i=1}^{m} (r_i + 1) n_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i + 1) \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \tag{2.23}$$

Parameter bestimmt werden müssen. Da die maximale Anzahl von Teilmodelleingängen nach Gl.(2.14) nur sehr selten erreicht wird, erhält man bei Verwendung des Teilmodellansatzes gegenüber dem Gesamtmodellansatz eine Reduzierung der Anzahl der zu schätzenden Parameter.

Bei dem Teilmodellansatz muß beachtet werden, daß die dynamischen und statischen Eigenschaften der einzelnen Übertragungsfunktionen bei der Bildung des gemeinsamen Nenners zusammengefaßt werden und nur die Koeffizienten des gemeinsamen Nennerpolynoms und der erweiterten Zählerpolynome geschätzt werden.

2.3. Das Einzelmodell (Modellansatz III)

Der Modellansatz III wurde entwickelt, um jede Übertragungsfunktion innerhalb des Teilmodells direkt und unabhängig von anderen Übertragungsfunktionen schätzen zu können. Als Ergebnis der Identifikation liegen dann sogenannte Einzelmodelle vor, die einen Ein- und einen Ausgang besitzen.

Um die Einzelmodelle zu erhalten, geht man von einem Teilmodell (Bild 2.6) aus und ordnet jeder Übertragungsfunktion $\bar{G}_{ij}(z)$ einen eigenen Ausgang $\bar{y}_{ij}$ zu (Bild 2.7).

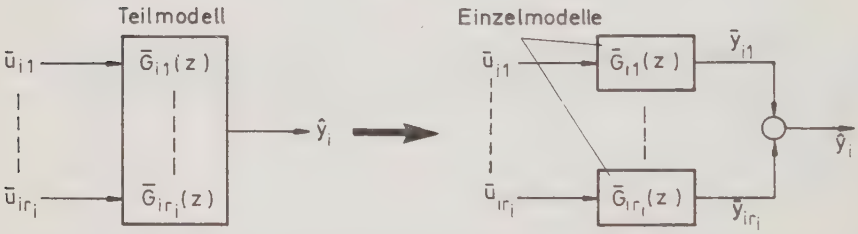


Bild 2.7. Die Aufteilung des Teilmodells in Einzelmodelle

Da die Einzelmodelle Eingrößensysteme sind, kann somit das Mehrgrößenmodell als eine Parallelschaltung von Eingrößensystemen betrachtet werden. Dadurch vereinfacht sich die Identifikationsaufgabe wesentlich, da die auf dem Gebiete der Eingrößenidentifikation im Laufe der vergangenen Jahre gesammelten Erfahrungen direkt auf die Mehrgrößenidentifikation übertragen werden können.

Die Identifikation von Einzelmodellen ist jedoch nur möglich, wenn die Ausgänge $\bar{y}_{ij}(k)$ für die Schätzalgorithmen zur Verfügung

stehen. Sind die Einzelsystemausgänge jedoch meßbar, so handelt es sich um einen trivialen Fall der Mehrgrößenidentifikation. Bei den weiteren Betrachtungen werden nur solche Systeme behandelt, in denen die Ausgänge nicht meßbar sind.

Um dennoch eine Aufteilung in Einzelmodelle durchführen zu können, müssen die unbekannten Signale geschätzt werden. Diese Schätzung wird mit Hilfe eines Signalmodells durchgeführt, welches z.B. mit dem Teilmodellansatz geschätzt werden kann. Der Algorithmus besteht also aus 2 Stufen:

- der Ausgangssignalschätzung mittels eines Signalmodells und
- der Schätzung der Parameter der Einzelmodelle.

Zunächst werden die Ausgangssignale mit einem Signalmodell geschätzt. Von der Genauigkeit dieser Schätzung ist die Güte der Parameterschätzung der Einzelmodelle in der zweiten Stufe abhängig. Mit dem Ausgangsfehler des Einzelmodells $e_{A,ij}(k)$ wird das mit dem Signalmodell geschätzte Ausgangssignal $\tilde{y}_{ij}(k)$ und das mit dem Einzelmodell geschätzte Ausgangssignal $\bar{y}_{ij}(k)$ verglichen:

$$e_{A,ij}(k) = \tilde{y}_{ij}(k) - \bar{y}_{ij}(k) \quad . \tag{2.24}$$

Eine andere Möglichkeit, die Ausgangsfehler $e_{A,ij}$ zu bestimmen, ist die Möglichkeit, zunächst den Ausgangsfehler des Teilmodells $e_{A,i}$ nach

$$e_{A,i}(k) = y_i(k) - \sum_{j=1}^{r_i} \bar{y}_{ij}(k) \tag{2.25}$$

zu berechnen und diesen dann in die Ausgangsfehler $e_{A,ij}(k)$ aufzuteilen. Die Aufteilung kann nach verschiedenen Gesichtspunkten wie z.B. Ordnung, Eingangssignale, Verstärkung geschehen. Dieser Weg hat sich jedoch als nicht robust und sehr störanfällig erwiesen, da ein geeignetes Aufteilungsverfahren fehlt.

Aus dem Ausgangsfehler gemäß Gl.(2.24) kann direkt der Gleichungsfehler

$$E_{ij}(z) = \bar{A}_{ij}(z^{-1})\ \tilde{Y}_{ij}(z) - \bar{B}_{ij}(z^{-1})\ \bar{U}_{ij}(z) \tag{2.26}$$

definiert werden.

Die Anzahl der beim Modellansatz III zu schätzenden Parameter ist mit

$$S_{III} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \tag{2.27}$$

zwar weitaus geringer als beim Modellansatz I und II, jedoch müssen bei einem Vergleich auch die Parameter des Signalmodells hinzugerechnet werden.

Um einen übersichtlichen Vergleich der drei hier behandelten Modellansätze zu erhalten, sind die Modellstrukturen in Tabelle 2.1 nochmals zusammengestellt.

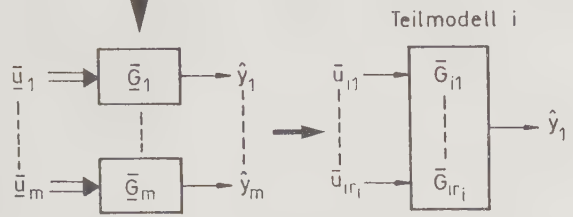
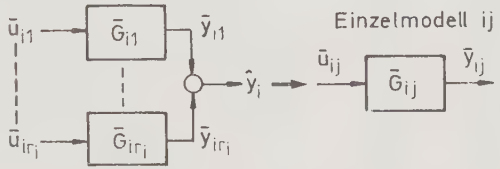
	Schematische Darstellung	Anzahl der Modelle	Anzahl der Parameter	Gleichungs-fehler
Modellansatz I		1	$S_I = (mr+1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} n_{ij}$	Gl. (2.10)
Modellansatz II		m	$S_{II} = \sum_{i=1}^{m}(r_i+1)\sum_{j=1}^{r_i} n_{ij}$	Gl. (2.22)
Modellansatz III		mr_i	$S_{III} = 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} n_{ij}$	Gl. (2.26)

Tabelle 2.1. Der Aufbau des Gesamtmodells, der Teilmodelle und der Einzelmodelle

3. Die Mehrgrößenidentifikation

Wenn die im vorherigen Kapitel vorgestellten Modellansätze in Bezug auf ihre Anwendbarkeit und ihre Leistungsfähigkeit bei der Identifikation untersucht werden sollen, ist es notwendig, einen objektiven Beurteilungsmaßstab zu finden. Bei simulierten Systemen, deren Aufbau ja bekannt ist, ist ein objektiver Vergleich der Schätzergebnisse möglich. Bei unbekannten Systemen ist das Modell dann als gut zu bezeichnen, wenn alle Forderungen des Benutzers an das Modell von diesem erfüllt werden. Die Identifikation muß prinzipiell also nur so gut sein, wie es von der Problemstellung her verlangt wird.

Die Forderungen der Anwender bei der Identifikation von Mehrgrößensystemen lassen sich wie folgt formulieren:

- Der Anwender möchte mit Hilfe des Modells das Ausgangsverhalten des Prozesses simulieren oder vorhersagen. Er ist nur an einer sehr genauen Schätzung der Ausgangssignale interessiert und legt keinen Wert auf die Struktur und die Parameter des Modells. Weiterhin stellt er keine Forderungen bezüglich einer Minimierung der Zahl der Modellparameter. Diese Forderungen werden mit einer *Systemidentifikation* erfüllt.

- Der Anwender ist wiederum an einer genauen Schätzung der Ausgangssignale interessiert, jedoch legt er auch Wert auf die Kenntnis der Struktur und auf die genauen Parameter des Modells. Diese Forderungen werden mit einer *Parameteridentifikation* erfüllt.

Mit diesen Forderungen sollen die Anwendbarkeit und die Leistungsfähigkeit der Modellansätze beurteilt werden. Zuvor werden die rekursiven Schätzalgorithmen für die Least Squares (LS)-, die Instrumentelle Variablen (IV) - und die 3. Erweiterte Matrizen (3. EM)-Methode hergeleitet. Die Untersuchungen beschränken sich

auf diese Methoden, da sie sich bei der Identifikation von Eingrößensystemen als besonders robust und zuverlässig erwiesen haben (Bauer (1977)).

3.1. Die Numerik der Parameterschätzverfahren

Da sich die Schätzgleichungen der Mehrgrößenidentifikation nur aufgrund der geänderten Meßwert- und Parametervektoren von der Eingrößenidentifikation unterscheiden, wird auf die mathematische Herleitung nur im Anhang A eingegangen.

3.1.1 Die Parameterschätzung bei Verwendung des Modellansatzes II

Das Teilsystem i des Modellansatzes II besitzt den Ausgang y_i und den Eingangsvektor $\underline{\bar{u}}_i$. Ausgehend vom Gleichungsfehler, definiert durch die Differenzengleichung

$$e_i(k) = y_i(k) + \sum_{\ell=1}^{n_i} a^*_{\ell,i}\, y_i(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_i} b^*_{\ell,i1}\, \bar{u}_{i1}(k-\ell) - \ldots$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n_i} b^*_{\ell,ir_i}\, \bar{u}_{ir_i}(k-\ell) \quad , \tag{3.1}$$

können für die *Least Squares-Methode* der Meßwertvektor

$$\underline{m}_i^T(k) = \left[-y_i(k-1), \ldots, -y_i(k-n_i) \,\middle|\, \bar{u}_{i1}(k-1), \ldots, \bar{u}_{i1}(k-n_i) \,\middle|\, \ldots \right.$$

$$\left. \,\middle|\, \bar{u}_{ir_i}(k-1), \ldots, \bar{u}_{ir_i}(k-n_i) \right] \tag{3.2}$$

$$= \left[\underline{m}_{yi}^T \,\middle|\, \underline{m}_{\bar{u}i1}^T \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \underline{m}_{\bar{u}ir_i}^T \right] \tag{3.3}$$

und der Parametervektor

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) = \left[a^*_{1,i},\ldots,a^*_{n_i,i} \,\middle|\, b^*_{1,i1},\ldots,b^*_{n_i,i1} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, b^*_{1,ir_i},\ldots,b^*_{n_i,ir_i} \right] \quad (3.4)$$

$$= \left[\hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{a}_i} \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{b}_{i1}} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{b}_{ir_i}} \right] \quad (3.5)$$

gebildet werden. Mit dem Parameter- und dem Meßwertvektor lassen sich die Schätzgleichungen, wie in den Gln.(3.17a-d) dargestellt, herleiten.

Die LS-Methode liefert bekanntlich einen systematischen Schätzfehler (Bias), wenn das Störsignal kein weißes Rauschen darstellt. Die *3. Erweiterte Matrizen-Methode* versucht daher, das farbige Rauschen durch eine Filterung auf weißes Rauschen zurückzuführen. Der Modellaufbau ist in Tabelle 3.2 dargestellt. Die Gleichungsfehlerberechnung erfolgt mit der erweiterten Gleichung

$$e_i(k) = y_i(k) + \sum_{\ell=1}^{n_i} a^*_{\ell,i}\, y_i(k-\ell) - \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{\ell=1}^{n_i} b^*_{\ell,ij}\, \bar{u}_{ij}(k-\ell)$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n_i} c^*_{\ell,i}\, e_i(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n_i} d^*_{\ell,i}\, \hat{v}_i(k-\ell) \quad . \quad (3.6)$$

Der Meßwertvektor lautet nun

$$\underline{m}_i^T(k) = \left[\underline{m}^T_{\underline{y}i} \,\middle|\, \underline{m}^T_{\underline{u}_{i1}} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \underline{m}^T_{\underline{u}_{ir_i}} \,\middle|\, \underline{m}^T_{\underline{e}_i} \,\middle|\, \underline{m}^T_{\underline{\hat{v}}_i} \right] \quad (3.7)$$

und der Parametervektor ergibt sich entsprechend zu

$$\hat{\underline{p}}_i^T(k) = \left[\hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{a}_i} \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{b}_{i1}} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^{T*}_{\underline{b}_{ir_i}} \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^T_{\underline{c}_i} \,\middle|\, \hat{\underline{p}}^T_{\underline{d}_i} \right] , \quad (3.8)$$

wobei

$$\underline{m}_{e_i}^T(k) = \left[e_i(k-1), \ldots, e_i(k-n_i)\right] \tag{3.9}$$

$$\underline{m}_{\hat{v}_i}^T(k) = \left[-\hat{v}_i(k-1), \ldots, -\hat{v}_i(k-n_i)\right] \tag{3.10}$$

$$\underline{\hat{p}}_{c_i}^T(k) = \left[c_{1,i}, \ldots, c_{n_i,i}\right] \tag{3.11}$$

$$\underline{\hat{p}}_{d_i}^T(k) = \left[d_{1,i}, \ldots, d_{n_i,i}\right] \tag{3.12}$$

$$\hat{v}_i(k+1) = y_i(k+1) - \left[\underline{m}_{y_i}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \ldots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T\right] \begin{bmatrix} \underline{\hat{p}}_{a_i}^{T*} \\ \hline \underline{\hat{p}}_{b_{i1}}^{T*} \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{\hat{p}}_{b_{ir_i}}^{T*} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$e_i(k+1) = y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{\hat{p}}_i(k) \tag{3.14}$$

ist. Damit lassen sich wiederum die Schätzgleichungen, Gln.(3.17a-d), herleiten, wie im Anhang gezeigt wird.

Die *Instrumentelle Variablen-Methode* versucht ebenfalls, den systematischen Schätzfehler zu vermeiden, indem sie statt der gestörten Ausgangssignale geschätzte Hilfsvariablen verwendet. Neben dem Meßwertvektor wird auch ein Hilfsvariablenvektor

$$\underline{w}_i^T(k) = \left[-y_{H,i}(k-1), \ldots, -y_{H,i}(k-n_i) \mid \bar{u}_{i1}(k-1) \ldots \mid \ldots \mid \ldots \bar{u}_{ir_i}(k-n_i)\right] \tag{3.15}$$

aufgebaut, wobei die Hilfsvariablen mit einem Hilfsmodell (Bauer (1977)) bestimmt werden.

Für alle 3 Verfahren lassen sich die Schätzgleichungen einheitlich angeben, wenn für die LS- und die 3. EM-Methode

$$\underline{w}_i^T(k) = \underline{m}_i^T(k) \tag{3.16}$$

gesetzt wird. Die rekursiven Schätzgleichungen lauten

$$\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \hat{\underline{p}}_i(k) + \underline{q}_i(k+1)\, e_i(k+1) \tag{3.17a}$$

$$\underline{q}_i(k+1) = \underline{P}_i(k)\, \underline{w}_i(k+1) \left[1 + \underline{m}_i^T(k+1)\, \underline{P}_i(k)\, \underline{w}_i(k+1)\right]^{-1} \tag{3.17b}$$

$$\underline{P}_i(k+1) = \underline{P}_i(k) - \underline{q}_i(k+1)\, \underline{m}_i^T(k+1)\, \underline{P}_i(k) \tag{3.17c}$$

$$e_i(k+1) = y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\, \hat{\underline{p}}_i(k) \; . \tag{3.17d}$$

Die Schwierigkeiten dieses Ansatzes sind der hohe Speicherplatzbedarf und die große Rechenzeit. Ein Teilsystem mit 5 Eingängen und der Ordnung $n_i = 15$ müßte z.B. die Matrix $\underline{P}$ mit den Ordnungen 90 x 90 bilden. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wurde von Ljung, Morf und Falconer (1978) ein schneller Rechenalgorithmus angegeben. Dieser Algorithmus geht von der rekursiven Schätzgleichung (Anhang Gl.(A 13))

$$\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \hat{\underline{p}}_i(k) + \underline{P}_i(k+1)\, \underline{m}_i(k+1) \cdot e_i(k+1) \tag{3.18}$$

aus. In dieser Gleichung wird die Matrix $\underline{P}_i$ nicht explizit, sondern nur in Verbindung mit dem Meßwertvektor $\underline{m}_i$ benötigt. Um den enormen Platz der Matrix $\underline{P}_i$ zu sparen, ist es besser, den Vektor des Produktes

$$\underline{k}_i(k+1) = \underline{P}_i(k+1)\, \underline{m}_i(k+1) \tag{3.19}$$

rekursiv zu entwickeln. Die rekursiven Berechnungen dieses Vektors $\underline{k}_i$ werden im Anhang B sowohl für die LS- als auch für die IV-

Methode beschrieben. Das Verfahren besitzt den Nachteil, mathematisch recht aufwendig zu sein. Es eignet sich daher nicht für Eingrößensysteme und zeigt seine Vorteile erst bei Mehrgrößensystemen mit mehreren Eingängen und einer größeren Ordnung n_i.

3.1.2 Die Parameterschätzung bei Verwendung des Modellansatzes III

Da es sich bei den Einzelmodellen um Eingrößensysteme handelt, muß gegenüber den Schätzgleichungen der Eingrößensysteme (Bauer (1977)) nur eine zusätzliche Indizierung eingeführt werden, um das jeweilige Einzelmodell zu kennzeichnen.

Ausgehend von dem mit einer Differenzengleichung dargestellten Gleichungsfehler

$$e_{ij}(k+1) = \tilde{y}_{ij}(k) + \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} a_{\ell,ij}\, \tilde{y}_{ij}(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} b_{\ell,ij}\, \bar{u}_{ij}(k-\ell) \tag{3.20}$$

lassen sich für die *Least Squares-Methode* der Meßwertvektor

$$\underline{m}_{ij}^T(k) = \left[-\tilde{y}_{ij}(k-1), \ldots, -\tilde{y}_{ij}(k-n_{ij}) \,\middle|\, \bar{u}_{ij}(k-1), \ldots, \bar{u}_{ij}(k-n_{ij}) \right] \tag{3.21}$$

$$= \left[\underline{m}_{\tilde{y}_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{m}_{\bar{u}_{ij}}^T \right] \tag{3.22}$$

und der Parametervektor

$$\underline{\hat{p}}_{ij}^T(k) = \left[a_{1,ij}, \ldots, a_{n_{ij},ij} \,\middle|\, b_{1,ij}, \ldots, b_{n_{ij},ij} \right] \tag{3.23}$$

herleiten. Mit diesen Vektoren lassen sich die Schätzgleichungen, Gln.(3.34a-d), gemäß der Ableitung im Anhang angeben.

Bei Verwendung der *3. EM-Methode* muß wiederum die Gleichungsfehlerberechnung erweitert werden zu

$$e_{ij}(k) = \tilde{y}_{ij}(k) + \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} a_{\ell,ij}\,\tilde{y}_{ij}(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} b_{\ell,ij}\,\bar{u}_{ij}(k-\ell)$$

$$- \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} c_{\ell,ij}\,e_{ij}(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n_{ij}} d_{\ell,ij}\,\hat{v}_{ij}(k-\ell)\ . \tag{3.24}$$

Der Meßwertvektor lautet nun

$$\underline{m}_{ij}^T(k+1) = \left[\underline{m}_{\tilde{y}_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{m}_{\bar{u}_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{m}_{e_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{m}_{\hat{v}_{ij}}^T\right]\ , \tag{3.25}$$

und der Parametervektor ergibt sich zu

$$\underline{\hat{p}}_{ij}^T(k+1) = \left[\underline{\hat{p}}_{a_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{\hat{p}}_{b_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{\hat{p}}_{c_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{\hat{p}}_{d_{ij}}^T\right]\ , \tag{3.26}$$

wobei

$$\underline{m}_{e_{ij}}^T(k) = \left[e_{ij}(k-1),\ \ldots,\ e_{ij}(k-n_{ij})\right] \tag{3.27}$$

$$\underline{m}_{\hat{v}_{ij}}^T(k) = \left[-\hat{v}_{ij}(k-1),\ \ldots,-\hat{v}_{ij}(k-n_{ij})\right] \tag{3.28}$$

$$\underline{\hat{p}}_{c_{ij}}^T(k) = \left[c_{1,ij},\ \ldots,\ c_{n_{ij},ij}\right] \tag{3.29}$$

$$\underline{\hat{p}}_{d_{ij}}^T(k) = \left[d_{1,ij},\ \ldots,\ d_{n_{ij},ij}\right] \tag{3.30}$$

$$\hat{v}_{ij}(k+1) = \tilde{y}_{ij}(k+1) - \left[\underline{m}_{\tilde{y}_{ij}}^T \,\middle|\, \underline{m}_{\bar{u}_{ij}}^T\right] \left[\begin{array}{c} \underline{\hat{p}}_{a_{ij}}^T \\ \hline \underline{\hat{p}}_{b_{ij}}^T \end{array}\right] \tag{3.31}$$

$$e_{ij}(k+1) = \tilde{y}_{ij}(k+1) - \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{\hat{p}}_{ij}(k) \qquad (3.32)$$

ist. Damit lassen sich wiederum die Schätzgleichungen, Gln. (3.34a-d), herleiten.

Der Hilfsvariablenvektor der *IV-Methode* ist beim Einzelmodellansatz definiert als

$$\underline{w}_{ij}^T(k) = \left[-y_{H,ij}(k-1),\ldots,-y_{H,ij}(k-n_{ij}) \mid \bar{u}_{ij}(k-1),\ldots,\bar{u}_{ij}(k-n_{ij})\right] . \qquad (3.33)$$

Die für die drei Verfahren allgemeingültigen Schätzgleichungen lauten:

$$\underline{\hat{p}}_{ij}(k+1) = \underline{\hat{p}}_{ij}(k) + \underline{q}_{ij}(k+1)\ e_{ij}(k+1) \qquad (3.34a)$$

$$\underline{q}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\ \left[1 + \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\right]^{-1} \qquad (3.34b)$$

$$\underline{P}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k) - \underline{q}_{ij}(k+1)\ \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k) \qquad (3.34c)$$

$$e_{ij}(k+1) = \tilde{y}_{ij}(k+1) - \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{\hat{p}}_{ij}(k) . \qquad (3.34d)$$

Für die LS- und die 3. EM-Methode wird

$$\underline{w}_{ij}(k+1) = \underline{m}_{ij}(k+1) \qquad (3.35)$$

gesetzt.

In Tabelle 3.1 sind abschließend die Schätzgleichungen sowie der Aufbau der Vektoren nochmals zusammenfassend aufgeführt. Die anschließende Tabelle 3.2 zeigt den Aufbau der Systeme und Modelle für die Schätzalgorithmen.

	Modellansatz II	Modellansatz III
	$\underline{\hat{p}}_i(k+1) = \underline{\hat{p}}_i(k) + \underline{q}_i(k+1)\ e_i(k+1)$	$\underline{\hat{p}}_{ij}(k+1) = \underline{\hat{p}}_{ij}(k) + \underline{q}_{ij}(k+1)\ e_{ij}(k+1)$
	$\underline{q}_i(k+1) = \underline{P}_i(k)\ \underline{w}_i(k+1)\left[1 + \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k)\ \underline{w}_i(k+1)\right]^{-1}$	$\underline{q}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\left[1 + \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\right]^{-}$
	$\underline{P}_i(k+1) = \underline{P}_i(k) - \underline{q}_i(k+1)\ \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k)$	$\underline{P}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k) - \underline{q}_{ij}(k+1)\ \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)$
	$e_i(k+1) = y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{\hat{p}}_i(k)$	$e_{ij}(k+1) = \tilde{y}_{ij}(k+1) - \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{\hat{p}}_{ij}(k)$
LS	$\underline{\hat{p}}_i^T = \left[\underline{p}_{a_i}^T \mid \underline{p}_{b_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{p}_{b_{ir_i}}^T\right]$ $\underline{m}_i^T = \left[\underline{m}_{y_i}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T\right]$ $\underline{w}_i^T = \underline{m}_i^T$	$\underline{\hat{p}}_{ij}^T = \left[\underline{p}_{a_{ij}}^T \mid \underline{p}_{b_{ij}}^T\right]$ $\underline{m}_{ij}^T = \left[\underline{m}_{y_{ij}}^T \mid \underline{m}_{u_{ij}}^T\right]$ $\underline{m}_{ij}^T = \underline{w}_{ij}^T$
3.EM	$\underline{\hat{p}}_i^T = \left[\underline{p}_{a_i}^T \mid \underline{p}_{b_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{p}_{b_{ir_i}}^T \mid \underline{p}_{c_i}^T \mid \underline{p}_{d_i}^T\right]$ $\underline{m}_i^T = \left[\underline{m}_{y_i}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T \mid \underline{m}_{e_i}^T \mid \underline{m}_{\hat{v}_i}^T\right]$ $\underline{w}_i^T = \underline{m}_i^T$	$\underline{\hat{p}}_{ij}^T = \left[\underline{p}_{a_{ij}}^T \mid \underline{p}_{b_{ij}}^T \mid \underline{p}_{c_{ij}}^T \mid \underline{p}_{d_{ij}}^T\right]$ $\underline{m}_{ij}^T = \left[\underline{m}_{y_{ij}}^T \mid \underline{m}_{u_{ij}}^T \mid \underline{m}_{e_{ij}}^T \mid \underline{m}_{\hat{v}_{ij}}^T\right]$ $\underline{w}_{ij}^T = \underline{m}_{ij}^T$
IV	$\underline{\hat{p}}_i^T = \left[\underline{p}_{a_i}^T \mid \underline{p}_{b_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{p}_{b_{ir_i}}^T\right]$ $\underline{m}_i^T = \left[\underline{m}_{y_i}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T\right]$ $\underline{w}_i^T = \left[\underline{m}_{y_{H,i}}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \cdots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T\right]$	$\underline{\hat{p}}_{ij}^T = \left[\underline{p}_{a_{ij}}^T \mid \underline{p}_{b_{ij}}^T\right]$ $\underline{m}_{ij}^T = \left[\underline{m}_{\hat{y}_{ij}}^T \mid \underline{m}_{u_{ij}}^T\right]$ $\underline{w}_{ij}^T = \left[\underline{m}_{y_{H,ij}}^T \mid \underline{m}_{u_{ij}}^T\right]$

Tabelle 3.1. Parameterschätzalgorithmen für den Modellansatz I und III

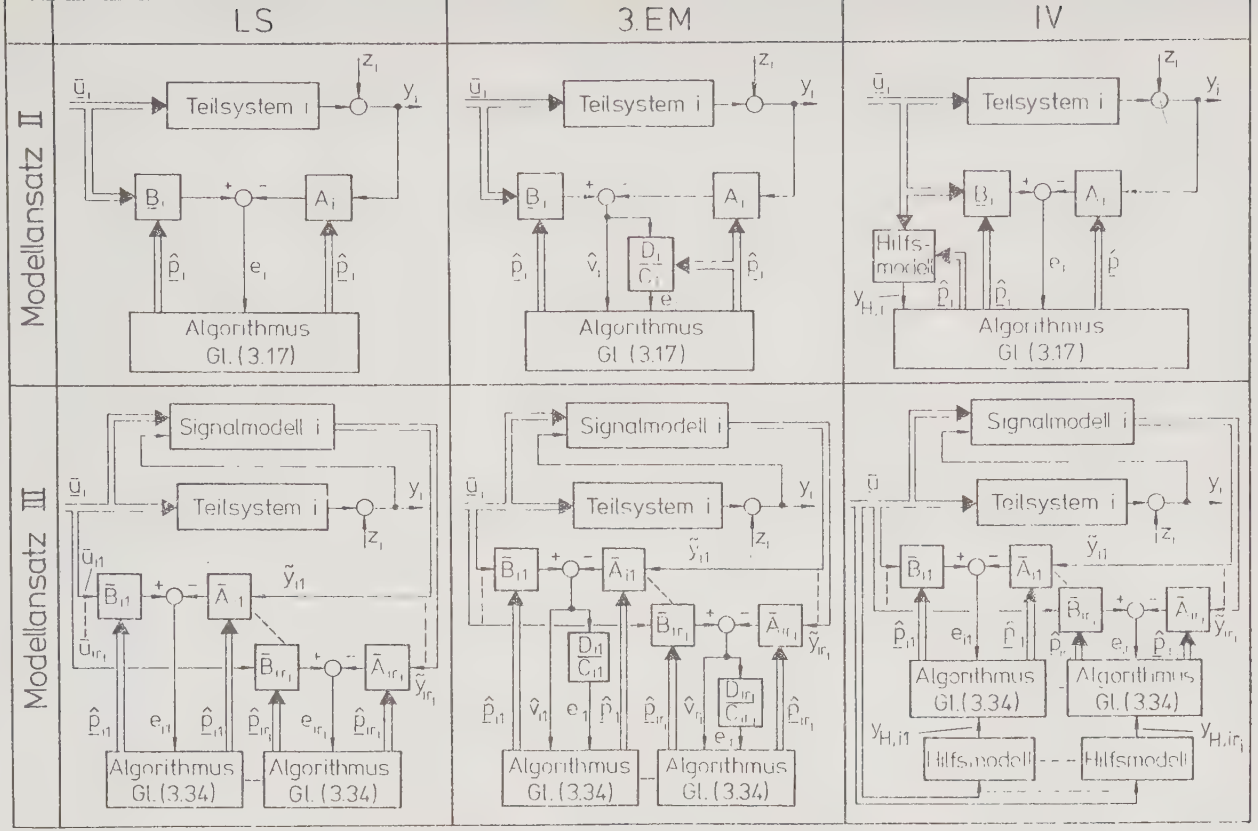


Tabelle 3.2. Modellaufbau für die LS-, die 3.EM- und die IV-Methode bei Verwendung des Modellansatzes II und III

3.2. Anwendungsmöglichkeit und Leistungsfähigkeit der Modellansätze II und III

Die beiden Modellansätze wurden an einer Reihe von simulierten Systemen getestet. Die dabei erzielten Ergebnisse sollen anhand zweier repräsentativer Beispiele veranschaulicht werden. Die Wertung der Ergebnisse bezieht sich nicht allein auf die Einzelresultate, sondern soll die allgemeinen Untersuchungsergebnisse wiedergeben.

3.2.1 Die untersuchten Mehrgrößensysteme

Das erste Beispiel ist in seinem Aufbau sehr einfach, wobei auch die Ordnung der Übertragungsfunktion niedrig gehalten wird. Dies geschieht deshalb, um die prinzipiellen Schätzergebnisse übersichtlich darstellen zu können. Da dabei etwaige Fehler nicht so deutliche Auswirkungen haben, wird als 2. Beispiel ein sehr komplexes System gewählt.

Testbeispiel 1: Das Teilsystem besitze 2 Eingänge $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ und den Ausgang y (Bild 3.1). Die s- und die z-Übertragungsfunktionen

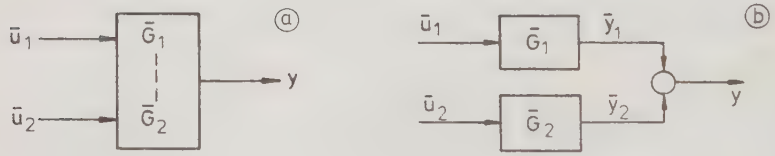


Bild 3.1. Aufbau des Testbeispiels 1
a) Teilsystem b) Einzelsysteme

sind in Tabelle 3.3 dargestellt, wobei eine Abtastzeit von T = 1 *) und ein Halteglied nullter Ordnung gewählt wurden.

*) Die Zeiteinheit wurde auf die Einheit der Streckenzeitkonstanten bezogen.

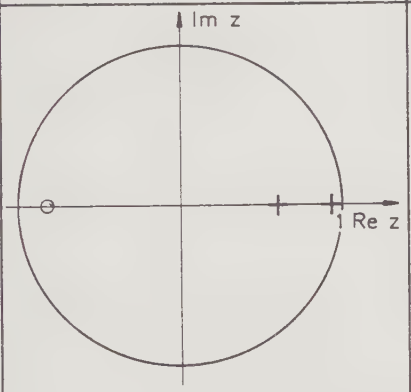
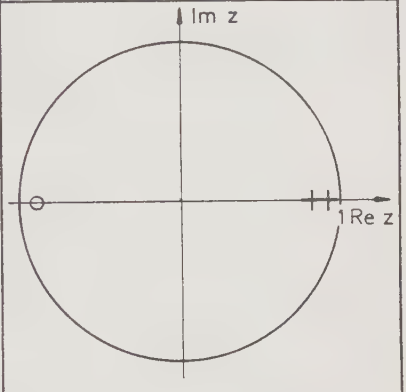
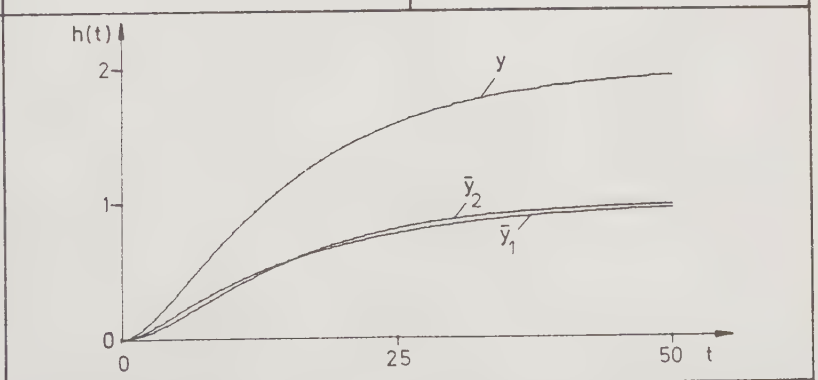
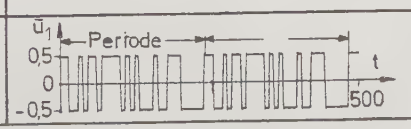
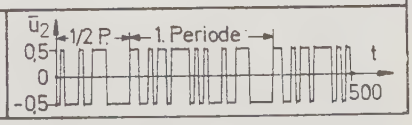
	Einzelsystem 1	Einzelsystem 2
G(s)	$\bar{G}_1(s) = \frac{\bar{B}_1(s)}{\bar{A}_1(s)} = \frac{1}{(1+2s)(1+15s)}$	$\bar{G}_2(s) = \frac{\bar{B}_2(s)}{\bar{A}_2(s)} = \frac{1}{(1+5s)(1+11s)}$
G(z)	$\bar{G}_1(z) = \frac{\bar{B}_1(z^{-1})}{\bar{A}_1(z^{-1})} = \frac{0.0139z^{-1}+0.0115z^{-2}}{1-1.542z^{-1}+0.567z^{-2}}$	$\bar{G}_2(z) = \frac{\bar{B}_2(z^{-1})}{\bar{A}_2(z^{-1})} = \frac{0.083z^{-1}+0.075z^{-2}}{1-1.732z^{-1}+0.747z^{-2}}$
Pole u. Nullstellen	$z_{p1} = 0.6065$ $z_{n1} = -0.8281$ $z_{p2} = 0.9355$	$z_{p1} = 0.8187$ $z_{n1} = -0.9074$ $z_{p2} = 0.9131$
Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene		
Übergangsfunktionen		
Eingangssignale		

Tabelle 3.3. Übertragungsfunktionen, Pol-Nullstellenverteilung und Übergangsfunktionen des Testbeispiels 1

Tabelle 3.3 enthält weiterhin die Lage der Pole in der z-Ebene, die Übergangsfunktionen und die verwendeten Eingangssignale. Dabei handelt es sich um ein "Pseudo-Random-Binary"-Signal (PRBS), welches beim 2. Eingang um eine halbe Periode verschoben wurde. Die Ausgangssignale sind somit unabhängig voneinander, da die Systemdynamik beider Einzelsysteme innerhalb einer halben Periode abklingt. Dem Ausgangssignal y wurde kein zusätzliches Rauschsignal überlagert, um die Ergebnisse der Identifikation einwandfrei beurteilen zu können.

Testbeispiel 2: Das Teilsystem besitzt 4 Eingänge $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ und $\bar{u}_4$ und den Ausgang y (Bild 3.2). Da bei diesem Beispiel nur die

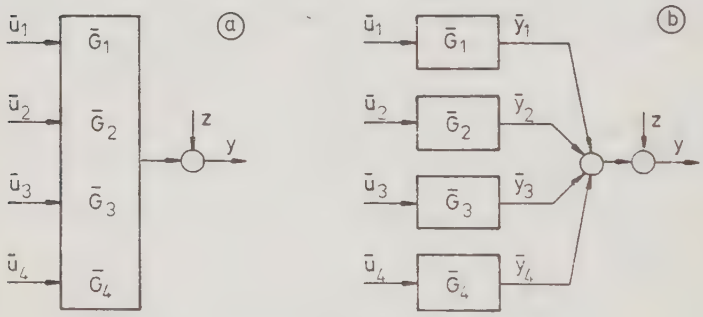


Bild 3.2. Aufbau des Testbeispiels 2
a) Teilsystem b) Einzelsysteme

Lage der Pole in der z-Ebene betrachtet werden soll, wird in Tabelle 3.4 die Lage der Pole und Nullstellen numerisch und graphisch angegeben. Für die Eingangserregung wurde ein PRB-Signal erzeugt, welches, jeweils um eine 1/4-Periode versetzt, vier unabhängige Ausgangssignale liefert. Dem Ausgangssignal wurde ein gleichverteiltes Rauschen überlagert, dessen max. Amplitude 25 % der max. Amplitude des Ausgangssignals y beträgt.

Pol-Nullstellenverteilung

Einzelsystem 1

$z_{p1} = 0.6065$ $z_{n1} = -0.2082$
$z_{p2} = 0.7515$ $z_{n2} = -2.9534$
$z_{p3} = 0.8187$

Einzelsystem 2

$z_{p1} = 0.5134$ $z_{n1} = -0.2028$
$z_{p2} = 0.7788$ $z_{n2} = -2.8780$
$z_{p3} = 0.8464$

Einzelsystem 3

$z_{p1} = 0.3678$ $z_{n1} = -0.1792$
$z_{p2} = 0.6703$ $z_{n2} = -2.5822$
$z_{p3} = 0.8669$

Einzelsystem 4

$z_{p1} = 0.6412$ $z_{n1} = -0.2149$
$z_{p2} = 0.8007$ $z_{n2} = -3.0649$
$z_{p3} = 0.8337$

Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene

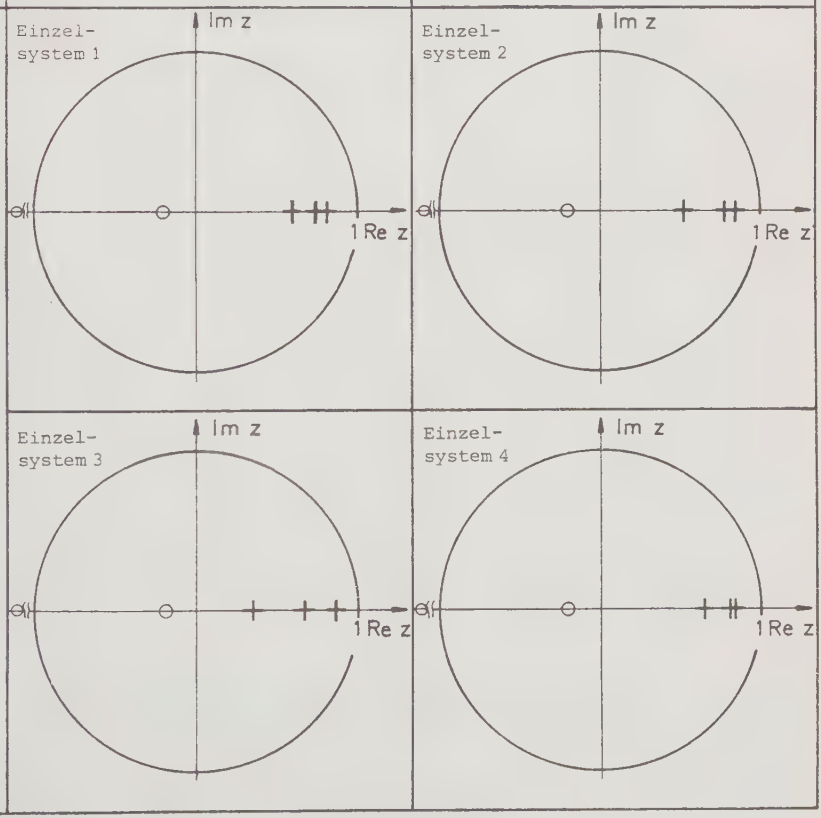


Tabelle 3.4. Pol-Nullstellenverteilung des Testbeispiels 2

3.2.2 Die Identifikation mit dem Modellansatz II

Zur Identifikation wurde für das störungsfreie Testbeispiel 1 die Least Squares-Methode und für das Testbeispiel 2 die Instrumentelle Variablen-Methode angewandt. Bei dem Testbeispiel 1 führte die nicht rekursive Maximum-Likelihood-Schätzung zu prinzipiell gleichen Ergebnissen.

Testbeispiel 1: Die Identifikationsergebnisse nach Verarbeitung von 1000 Meßpunkten sind in Tabelle 3.5 zusammengestellt. Geschätzt wurden der gemeinsame Nenner $A^*(z^{-1})$ und die beiden erweiterten Zähler $B_1^*(z^{-1})$ und $B_2^*(z^{-1})$. Der während der Schätzung entstandene Gleichungsfehler e ist ebenfalls in Tabelle 3.5 enthalten.

Der Verlauf und die Größe des Gleichungsfehlers zeigen, daß das dynamische und statische Verhalten des Systems und des Modells sehr gut übereinstimmen. Dies bedeutet, daß eine gute Systemidentifikation erzielt wurde.

Um auch die Parameteridentifikation beurteilen zu können, werden die geschätzten, durch die gemeinsame Hauptnennerbildung erweiterten Übertragungsfunktionen betrachtet. Der gemeinsame Nenner besteht aus 2 reellen und 2 komplexen Polen. In beiden Übertragungsfunktionen werden die komplexen Pole annähernd durch Nullstellen kompensiert, so daß das dynamische Eigenverhalten in beiden Übertragungsgliedern im wesentlichen mit den reellen Polen erzielt wird (Tabelle 3.5). Die reellen Pole können daher als gemeinsame Pole bezeichnet werden. Da die simulierten Einzelsysteme jedoch unterschiedliche Pole besitzen, die nicht zu gemeinsamen Polen zusammengefaßt werden können, wird der Nachteil des Teilmodellansatzes deutlich:

Aufgrund der Bildung des gemeinsamen Hauptnenners und der damit verbundenen Zusammenfassung der dynamischen Eigenschaften der einzelnen Übertragungsglieder zu einem Polynom ist es während der Parameterschätzung nicht möglich zu entscheiden, ob ein gemeinsamer Pol für verschiedene Übertragungsglieder vorliegt,

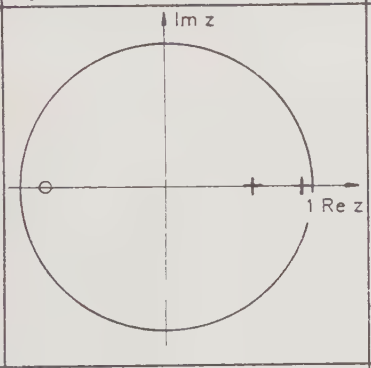
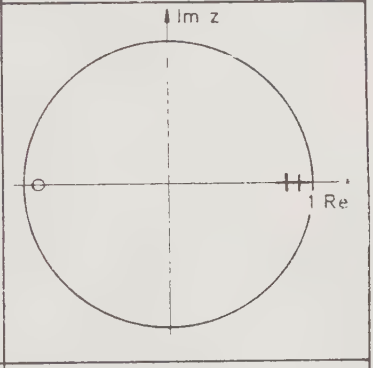
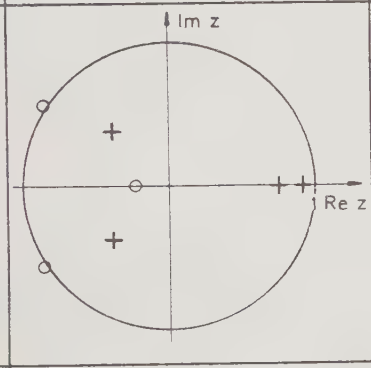
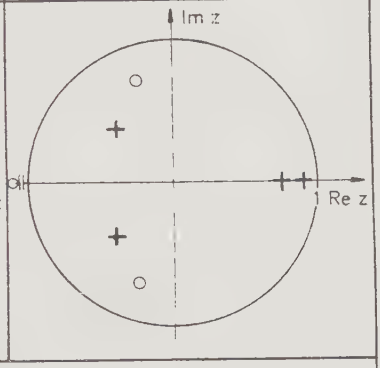
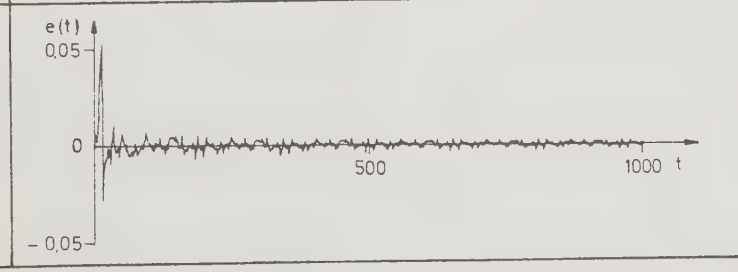
	Übertragungsfunktion $\bar{G}_1(z)$	Übertragungsfunktion $\bar{G}_2(z)$
geschätzte Pol-Nullstellen-verteilung	$z_{p1} = 0.6065 \quad z_{n1} = -0.9281$ $z_{p2} = 0.9355$	$z_{p1} = 0.8187 \quad z_{n1} = -0.9074$ $z_{p2} = 0.9131$
	$\hat{z}_{p1,2} = -0.3919 \quad \hat{z}_{n1} = -0.2354$ $\pm j0.34 \quad \hat{z}_{n2,3} = -0.8539$ $\hat{z}_{p3} = 0.7506 \quad \pm j0.56$ $\hat{z}_{p4} = 0.9173$	$\hat{z}_{p1,2} = -0.3919 \quad \hat{z}_{n1} = -1.323$ $\pm j0.34 \quad \hat{z}_{n,3} = -0.2409$ $\hat{z}_{p3} = 0.7506 \quad \pm j0.56$ $\hat{z}_{p4} = 0.9173$
wahre Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene		
geschätzte Pol-Nullstellen-verteilung in der z-Ebene		
Gleichungsfehler e		

Tabelle 3.5. Ergebnisse der Identifikation des Testbeispiels 1 bei Verwendung des Teilmodellansatzes

oder ob die Pole nur nahe beieinander liegen. Erst bei einer der Identifikation folgenden Zerlegung der Übertragungsfunktionen in Pole und Nullstellen findet eine eindeutige Zuordnung der dynamischen Anteile zu den einzelnen Übertragungsgliedern statt. Dabei ist dann erkennbar, daß verschiedene Übertragungsglieder die gleichen Pole benutzen und somit eine nicht gerechtfertigte Bildung gemeinsamer Pole durchgeführt wurde. Auf diesen Fehler wurde erstmals in Diekmann und Unbehauen (1979a, 1979b) hingewiesen.

Durch die Bildung gemeinsamer Pole weichen die geschätzten von den wahren Polen ab. Dieser Fehler bei der Polbestimmung müßte einen Fehler bei der Schätzung des Ausgangssignales y zur Folge haben. Da aber festgestellt wurde, daß die Ausgangssignalschätzung sehr gut ist, muß dieser Fehler durch einen anderen Fehler ausgeglichen werden. Untersucht man deshalb die sich kompensierenden Pol-Nullstellen, so stellt man fest, daß diese Kompensation um so ungenauer ist, je größer der Unterschied des geschätzten gemeinsamen Poles vom wahren ist. Dies bedeutet, daß bei der Schätzung des Ausgangssignals der durch die falsche Bildung eines gemeinsamen Poles entstandene Fehler durch eine ungenaue Kompensation der Pole und Nullstellen in dem erweiterten Übertragungsglied ausgeglichen wird.

Allgemeingültige Aussagen darüber,

- wie groß der Unterschied zwischen den Polen zweier oder mehrerer Übertragungsfunktionen sein muß, damit während der Schätzung kein gemeinsamer Pol gebildet wird,
- welche Lage der gemeinsame Pol besitzt und
- welche und wieviele nicht benötigte Pole entstehen,

lassen sich nicht treffen, da dies neben dem Systemverhalten auch von

- den Eingangssignalen,
- den Störanteilen,
- der Abtastzeit und
- den Anfangsbedingungen der rekursiven Schätzalgorithmen

abhängt.

Bevor die Ergebnisse zusammenfassend beurteilt werden, soll anhand des Testbeispiels 2 ein komplexeres Mehrgrößensystem untersucht werden.

Testbeispiel 2: Die Ergebnisse der Identifikation nach 1000 Abtastschritten wurden in Bild 3.3 und Tabelle 3.6 zusammengefaßt.

Bild 3.3. Gleichungsfehler der Identifikation des Testbeispiels 2 bei Verwendung des Teilmodellansatzes (ohne überlagerte Störung)

Wiederum kann aus der Größe und dem Verlauf des Gleichungsfehlers geschlossen werden, daß eine sehr gute Systemidentifikation erzielt wurde. Um eine Beurteilung der Parameterschätzung durchführen zu können, werden die Pole und Nullstellen der geschätzten Übertragungsfunktionen betrachtet. Für eine Parameteridentifikation müssen von den zwölf Polen des gemeinsamen Nenners in jeder Übertragungsfunktion neun Pole durch Nullstellen kompensiert werden. Ein Vergleich der Pol-Nullstellenverteilung zeigt, daß in allen vier Übertragungsgliedern die komplexen Polpaare

$$\hat{z}_{p1,2} = -0.67 \pm j0.17 \qquad \hat{z}_{p3,4} = -0.51 \pm j0.49$$

$$\hat{z}_{p5,6} = -0.19 \pm j0.71 \qquad \hat{z}_{p7,8} = 0.25 \pm j0.72$$

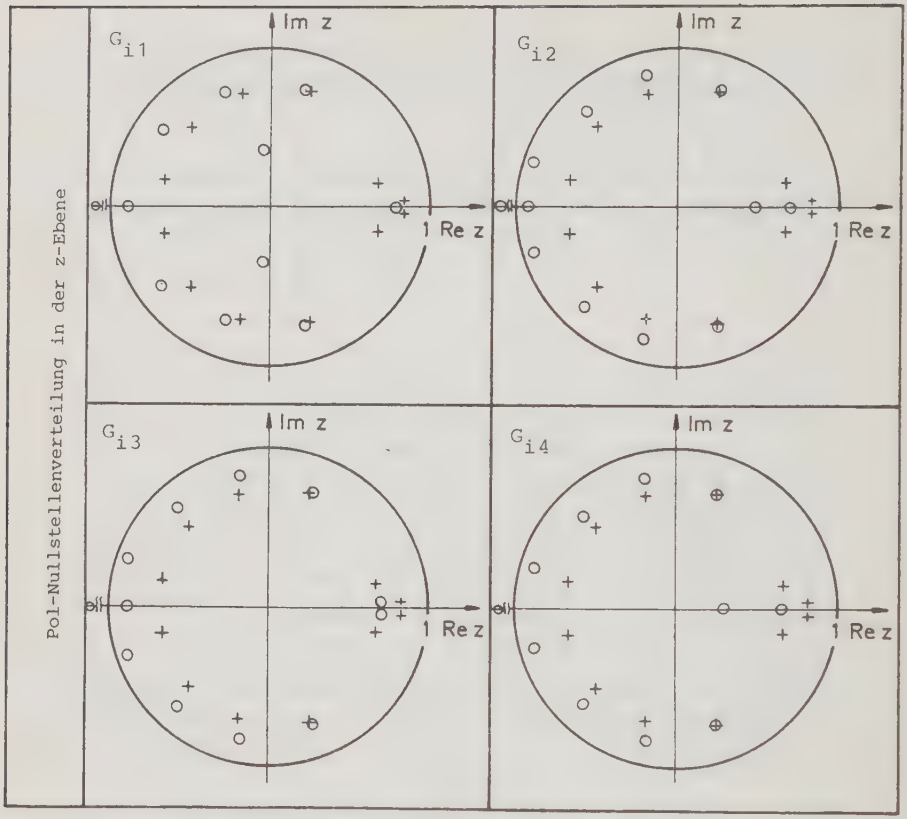


Tabelle 3.6. Ergebnisse der Identifikation des Testbeispiels 2 bei Verwendung des Teilmodellansatzes

annähernd kompensiert werden. Dies bedeutet, daß das Ausgangsverhalten des mit zwölf Polen simulierten Teilsystems von einem Teilmodell mit vier Polen nachgebildet werden kann. Insbesondere zeigt das Übertragungsglied G_{i1} auch, daß eine eindeutige Pol-Nullstellenzuordnung aufgrund der Komplexität des Systems nicht durchführbar ist. Damit wurde gezeigt, daß eine Parameteridentifikation nicht möglich ist.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit dem Teilmodellansatz kann eine gute *Systemidentifikation* erzielt werden, jedoch wird eine *Parameteridentifikation* dann scheitern, wenn zwei oder mehrere Übertragungsfunktionen annähernd gleiche Anteile im dynamischen Eigenverhalten besitzen. Da bei komplexeren Systemen eine Zuordnung von sich kompensierenden Polen und Nullstellen nicht möglich ist, kann aus dem Teilmodell kein parameterminimales Modell abgeleitet werden.

3.2.3 Die Identifikation mit dem Modellansatz III

Es wurden die gleichen Schätzverfahren wie beim Modellansatz II gewählt. Für die Schätzung der Ausgangssignale $\tilde{y}_{ij}$ wurde der Teilmodellansatz verwendet, dessen Parameter nach einem kurzen Vorlauf auch während der Schätzung des Einzelmodells noch angepaßt wurden. Die Schätzalgorithmen für das Signalmodell und die Einzelmodelle laufen parallel und völlig unabhängig voneinander.

Testbeispiel 1: Die Ergebnisse der Identifikation nach 1000 Abtastschritten sind in Tabelle 3.7 dargestellt. Da mit dem Einzelmodellansatz direkt die Übertragungsfunktionen der Einzelmodelle $\overline{G}_1(z)$ und $\overline{G}_2(z)$ geschätzt wurden, ist das Auftreten einer fehlerhaften Zusammenfassung des dynamischen Verhaltens ausgeschlossen worden. Die Parameter können mit einer Genauigkeit geschätzt werden, wie sie auch bei der Identifikation von Eingrößensystemen erzielt wird.

Da die Ausgangssignale $\tilde{y}_{ij}$ mit dem Teilmodellansatz geschätzt wurden, könnte der summierte Gleichungsfehler der Einzelmodelle maximal nur so klein werden wie der des Teilmodellansatzes. Daß dies in einigen Versuchsreihen nicht der Fall war, ist darauf zurückzuführen, daß mit den Einzelmodellen das Systemverhalten teilweise besser nachgebildet werden konnte.

Testbeispiel 2: Die in Tabelle 3.8 zusammengefaßten Ergebnisse zeigen, daß auch bei komplexeren Systemen eine zuverlässige Pa-

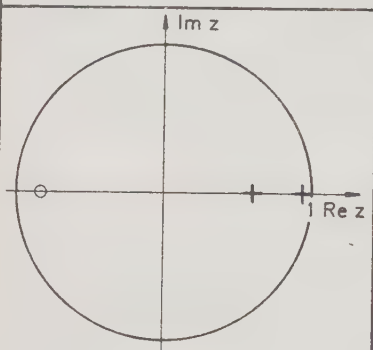
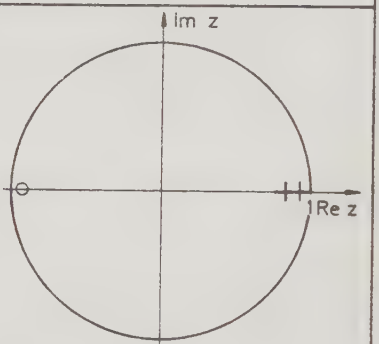
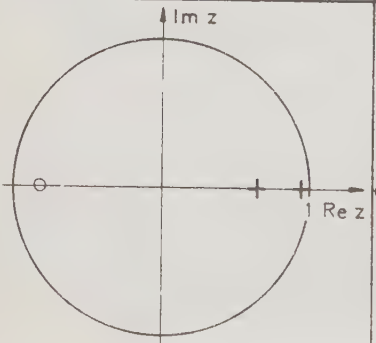
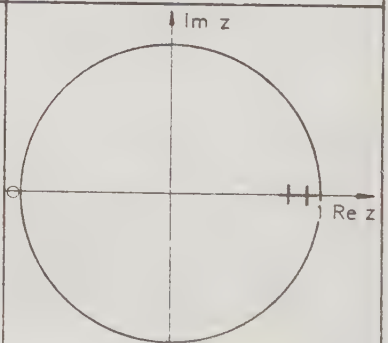
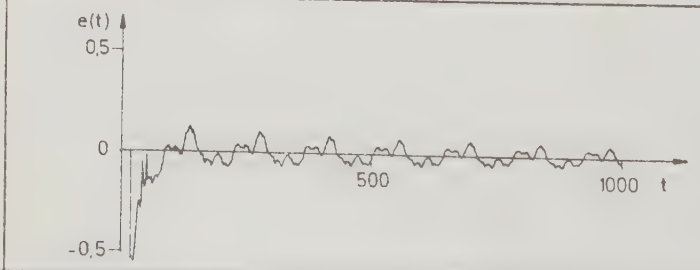
	Übertragungsfunktion $\overline{G}_1(z)$	Übertragungsfunktion $\overline{G}_2(z)$
geschätzte / wahre Pol-Nullstellenverteilung	$z_{p1} = 0.6065 \quad z_{n1} = -0.8281$ $z_{p2} = 0.9355$	$z_{p1} = 0.8187 \quad z_{n1} = -0.9074$ $z_{p2} = 0.9131$
	$\hat{z}_{p1} = 0.6295 \quad \hat{z}_{n1} = -0.8264$ $\hat{z}_{p2} = 0.9383$	$\hat{z}_{p1} = 0.7701 \quad \hat{z}_{n1} = -1.05$ $\hat{z}_{p2} = 0.9160$
wahre Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene		
geschätzte Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene		
Gleichungsfehler e		

Tabelle 3.7. Ergebnisse der Identifikation des Testbeispiels 1 bei Verwendung des Einzelmodellansatzes

rameterschätzung möglich ist. Die Darstellung mit Einzelmodellen ist in diesem Fall wesentlich übersichtlicher. Es erfolgt eine klare Zuordnung der dynamischen und statischen Eigenschaften zu den Einzelmodellen. Die Beschreibung des Mehrgrößenmodells läßt sich mit bedeutend weniger Parametern durchführen. Die Summation der Gleichungsfehler $e(t) = \sum_{i=1}^{4} e_i(t)$ des Testbeispiels ist im Bild 3.4 dargestellt.

Bild 3.4. Gleichungsfehler der Identifikation des Testbeispiels 2 bei Verwendung des Einzelmodellansatzes (ohne überlagerte Störung)

Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit dem Einzelmodellansatz ist sowohl eine System- als auch eine Parameteridentifikation möglich. Die erzielten Ergebnisse sind mit denen bei der Identifikation von Eingrößensystemen vergleichbar. Die Beschreibung mit Einzelmodellen ist übersichtlicher und benötigt weniger Parameter.

Anmerkung : Für die Identifikation benötigt der Einzelmodellansatz mehr Speicherplatz und Rechenzeit als der Teilmodellansatz, da die Erstellung eines Signalmodells erforderlich ist.

Pol-Nullstellenverteilung

Übertragungsfunktion $\overline{G}_1(z)$		Übertragungsfunktion $\overline{G}_2(z)$	
$z_{p1} = 0.6065$	$\hat{z}_{p1} = 0.6327$	$z_{p1} = 0.5134$	$\hat{z}_{p1} = 0.5020$
$z_{p2} = 0.7514$	$\hat{z}_{p2} = 0.7309$	$z_{p2} = 0.7788$	$\hat{z}_{p2} = 0.7953$
$z_{p3} = 0.8187$	$\hat{z}_{p3} = 0.8217$	$z_{p3} = 0.8464$	$\hat{z}_{p3} = 0.8358$
$z_{n1} = -0.208$	$\hat{z}_{n1} = -0.2012$	$z_{n1} = -0.2028$	$\hat{z}_{n1} = -0.1885$
$z_{n2} = -2.953$	$\hat{z}_{n2} = -2.7651$	$z_{n2} = -2.8780$	$\hat{z}_{n2} = -3.3017$
Übertragungsfunktion $\overline{G}_3(z)$		**Übertragungsfunktion $\overline{G}_4(z)$**	
$z_{p1} = 0.3678$	$\hat{z}_{p1} = 0.3612$	$z_{p1} = 0.6412$	$\hat{z}_{p1} = 0.6413$
$z_{p2} = 0.6703$	$\hat{z}_{p2} = 0.6828$	$z_{p2} = 0.8007$	$\hat{z}_{p2} = 0.7944$
$z_{p3} = 0.8668$	$\hat{z}_{p3} = 0.8604$	$z_{p3} = 0.8337$	$\hat{z}_{p3} = 0.8385$
$z_{n1} = -0.1792$	$\hat{z}_{n1} = -0.1922$	$z_{n1} = -0.2149$	$\hat{z}_{n1} = -0.2617$
$z_{n2} = -2.5822$	$\hat{z}_{n2} = -2.4305$	$z_{n2} = -3.0648$	$\hat{z}_{n2} = -2.575$

Pol-Nullstellenverteilung in der z-Ebene

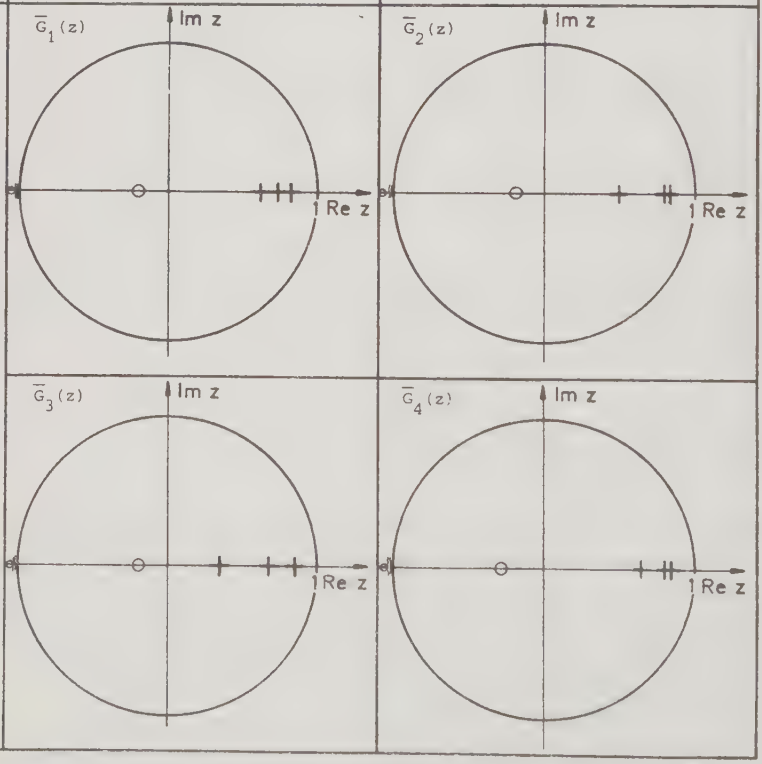


Tabelle 3.8. Ergebnisse der Identifikation des Testbeispiels 2 bei Verwendung des Einzelmodellansatzes

4. Die Identifikation mit Einzelmodellen

Neben der Möglichkeit zur Schätzung der richtigen Parameter bietet der Einzelmodellansatz weitere Vorteile aufgrund der unabhängig voneinander, parallel ablaufenden Schätzalgorithmen. Diese Vorteile sollen nachfolgend behandelt werden.

4.1. Die Mehrgrössenidentifikation mit unterschiedlichen Abtastzeiten

Die Wahl einer geeigneten Abtastzeit ist eine der wichtigsten Voraussetzungen zur Erzielung guter Ergebnisse bei der Identifikation. Einerseits muß die Abtastzeit T so klein gewählt werden, daß alle dynamischen Bewegungen des Systems erfaßt werden können, andererseits darf sie wiederum nicht so klein sein, daß innerhalb einer Zeitreihe nicht genügend Bewegung zu erkennen ist, was zu numerischen Schwierigkeiten im rekursiven Schätzalgorithmus führen würde. Die Abtastzeit ist somit in Abhängigkeit von dem Zeitverhalten des Systems zu wählen.

Dies verlangt jedoch, daß genügend a priori Informationen über das System und sein dynamisches Verhalten vorliegen. Solche Informationen können mit einer Testidentifikation gewonnen werden, die mit erheblichen Vereinfachungen zu einer Grobabschätzung des Systems führt. Mit den so erhaltenen Informationen wird dann ein Bereich festgelegt, innerhalb dessen geeignete Abtastzeiten liegen können. Bei der Identifikation von Eingrößensystemen hat sich z.B. für Systeme mit Tiefpaßverhalten folgende Methode zur Bestimmung einer geeigneten Abtastzeit T als recht zuverlässig in der Anwendung erwiesen:

Liegt die Übergangsfunktion des Systems (es genügt ein angenäherter Verlauf) vor, so kann daraus die Abtastzeit mit

T = (1/6 ... 1/10) $t_{63\,\%}$ bestimmt werden, wobei $t_{63\,\%}$ die Zeit ist, bei der die Übergangsfunktion 63 % ihres Endwertes erreicht hat.

Verwendet man dieses Verfahren zur Bestimmung *einer* Abtastzeit für die Identifikation von Mehrgrößensystemen, stellt sich die Frage, ob mit dieser Abtastzeit das dynamische Verhalten aller Übertragungsglieder erfaßt werden kann. Insbesondere werden Schwierigkeiten dann auftreten, wenn sich das dynamische Verhalten in den einzelnen Übertragungsgliedern stark unterscheidet. So werden große Fehler bei der Identifikation auftreten, wenn die Abtastzeit optimal für ein Übertragungsglied mit großen Zeitkonstanten gewählt wird, während ein parallel geschaltetes Übertragungsglied sehr kleine Einschwingzeiten besitzt.

Die Problematik soll anhand eines Beispiels diskutiert werden.

Beispiel: Es wird ein Teilsystem mit 2 Eingängen $\bar{u}_1$ und $\bar{u}_2$ und einem Ausgang y betrachtet (Bild 4.1). Die Übertragungsfunktionen lauten

$$\bar{G}_1(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+6s)} \tag{4.1}$$

und

$$\bar{G}_2(s) = \frac{1}{(1+2.5s)(1+5.5s)} \,. \tag{4.2}$$

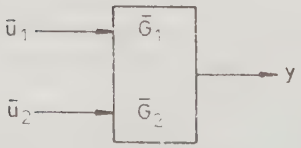


Bild 4.1. Teilsystem mit 2 Eingängen

Es sei angenommen, daß die Übergangsfunktionen mit Hilfe einer Testidentifikation ermittelt werden konnten (Bild 4.2). Wird nun

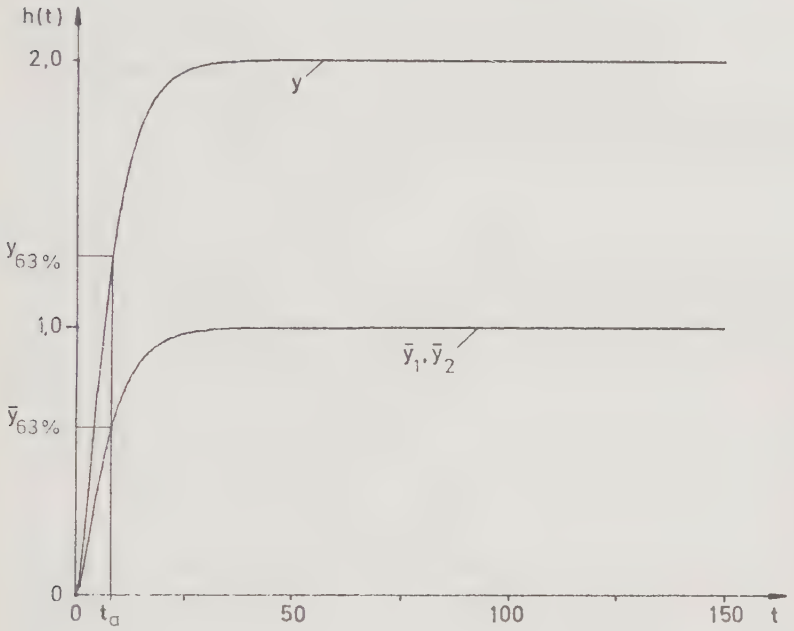


Bild 4.2. Übergangsfunktionen der Einzelmodelle und des Teilmodells bei annähernd gleichem dynamischen Verhalten

die zuvor genannte Methode zur Bestimmung der Abtastzeit angewendet, dann ergibt sich für das Teilsystemausgangssignal y eine Abtastzeit von

$$T = (0.1,\ldots,0.166)\ t_a\ . \tag{4.3}$$

Da zur Zeit t_a auch die Einzelsysteme 63 % ihres Endwertes erreicht haben, ist die Abtastzeit T ebenfalls für die Einzelsysteme optimal.

Das Beispiel zeigt, daß es genügt, eine Abtastzeit für Mehrgrößensysteme zu wählen, wenn die Übertragungsfunktionen annähernd gleiche Zeitkonstanten besitzen.

Falls jedoch das dynamische Verhalten der Einzelmodelle sehr verschieden ist, sind andere Überlegungen anzustellen, worauf im folgenden näher eingegangen werden soll. Dazu wird für das 2. Übertragungsglied eine geänderte Übertragungsfunktion

$$\bar{G}_2(s) = \frac{1}{(1 + 30s)(1 + 50s)} \qquad (4.4)$$

eingeführt. In Bild 4.3 sind die Übergangsfunktionen der Einzelmodelle und des Teilmodells dargestellt, welche wiederum durch eine Testidentifikation ermittelt wurden.

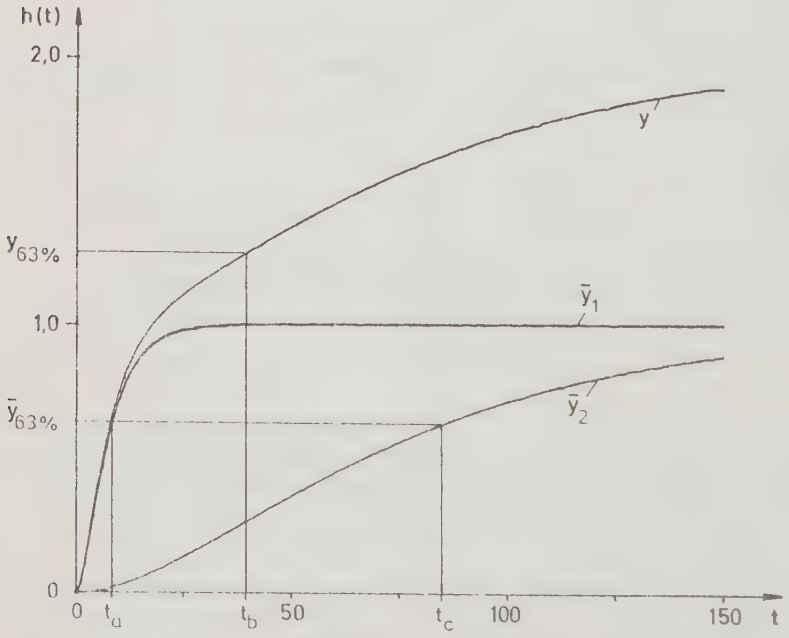


Bild 4.3. Übergangsfunktionen der Einzelmodelle und des Teilmodells bei unterschiedlichem dynamischen Verhalten

Aus den Übergangsfunktionen wird die Abtastzeit für

- das schnelle Einzelsystem zu $T_1 = 0.125\ t_a$,
- das langsame Einzelsystem zu $T_3 = 0.125\ t_c$ und für
- das Teilsystem zu $T_2 = 0.125\ t_b$

bestimmt. Mit den Abtastzeiten T_2 und T_3 können die Bewegungen des schnellen Einzelsystems nicht erfaßt werden, während bei Verwendung der Abtastzeit T_1 numerische Schwierigkeiten im Schätzalgorithmus auftreten, da sich das Ausgangssignal $\bar{y}_2$ während der für die Berechnung benötigten Abtastschritte nicht genügend verändert. Dies bedeutet, daß es keine geeignete Abtastzeit gibt, die zu einer eindeutigen Identifikation des Testbeispiels führt.

Die Ergebnisse seien nochmals zusammengefaßt:

Die Identifikation eines Mehrgrößensystems mit *einer* Abtastzeit

- ist möglich, wenn die Einzelsysteme annähernd gleiches Zeitverhalten besitzen,
- ist nicht möglich, wenn die Einzelsysteme sehr unterschiedliches dynamisches Verhalten besitzen.

Um den in der industriellen Anwendung häufig auftretenden Fall unterschiedlichen Zeitverhaltens dennoch identifizieren zu können, müssen unterschiedliche, dem Zeitverhalten der Übertragungsglieder angepaßte Abtastzeiten verwendet werden. Ermöglicht wird dies durch die Einführung des Einzelmodellansatzes, der eine unabhängige Schätzung der Einzelmodelle erlaubt. Dies würde in dem o.a. Beispiel bedeuten, daß für die Identifikation des Einzelmodells $\bar{G}_1$ die Abtastzeit T_1 und für die Identifikation des Einzelmodells $\bar{G}_2$ die Abtastzeit T_3 verwendet wird. Damit ist eine der wichtigsten Voraussetzungen für eine richtige Parameterschätzung erfüllt worden.

Eingeschränkt wird die Wahlmöglichkeit unterschiedlicher Abtastzeiten dadurch, daß das Signalmodell den Modellansatz II verwendet, so daß alle Ausgangssignale stets nur zu einem Zeitpunkt gemeinsam geschätzt werden können. Erfolgt die Schätzung der Ausgangssignale mit der kleinsten Abtastzeit, so ist die Abtastung optimal für das Einzelsystem mit den kleinen Zeitkonstanten. Die Abtastung für das langsamere Einzelsystem ist jedoch zu klein gewählt, da in den Zeiträumen, die jeweils für die Berechnung verwandt werden, der Ausgangsverlauf fast konstant ist, wodurch numerische Schwierigkeiten in den rekursiven Schätzalgorithmen auftreten können. Würde man für dieses Einzelsystem nur jeden 11. Wert der Signalschätzung auswählen und für die Identifikation der Einzelmodelle verwenden, wäre das Signal hinreichend erregt, so daß keine Singularität in der Matrix $\underline{P}$ auftreten kann.

Verallgemeinert läßt sich sagen, daß die Einzelsysteme mit langsameren Zeitkonstanten nur jede l-te Ausgangssignalschätzung für die Identifikation der Einzelmodelle zu verwenden brauchen. Die Abtastzeiten berechnen sich somit nach

$$T_{ij} = l_{ij} \cdot T_{i1} \quad (i = 1, \ldots, m), \ (j = 2, \ldots, r_i) \qquad (4.5)$$

$$(l_{ij} = 2,3,\ldots)$$

wobei $T_{i1} < T_{i2} < \ldots < T_{ir_i}$ gilt.

Durch die Wahl von l_{ij} werden die für die Einzelsysteme jeweils optimalen Abtastzeiten bestimmt, die dann jedoch ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten Abtastzeit sind.

4.2. Die Mehrgrössenidentifikation mit verschiedenen Wichtungsfaktoren

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Parameter eines Systems hängt neben den Schätzverfahrensbedingungen im wesentlichen von den Eigenschaften des Systems selbst ab. Ist die Konvergenzgeschwindigkeit zu langsam, so empfiehlt sich die Einführung von Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung. Von Bauer (1977) sind verschiedene Arten von Wichtungen der Signalwerte für die Anwendung bei Eingrößensystemen verglichen worden. Sie basieren darauf, die Elemente der Matrix $\underline{P}$ in den Gln.(3.17c) bzw. (3.34c) im Laufe der Schätzung stets etwas zu vergrößern. In Tabelle 4.1 sind diese Verfahren in der Übersicht nochmals dargestellt. Von Bauer (1977) werden auch Richtlinien für die optimale Wahl der Wichtungsfaktoren angegeben. Der Wichtungsfaktor wird dabei in Abhängigkeit vom Systemverhalten bestimmt.

Wichtungsmethode	Abkürz.	Gleichung
Rücksetztechnik	R	Rücksetzen von $\underline{P}(k_R)$ auf $P(0)$ nach k_R Messungen
konstante Wichtung variable Wichtung variable Wichtung	G1 G2 G3	$\underline{P}'(k+1)=\frac{1}{\rho(k+1)}\underline{P}(k+1)$ mit $\rho(k+1)=\begin{cases}\rho_o < 1\\ \rho(k)+\left[1-\rho(k)\right]\Delta\rho\\ 1-\frac{\rho}{1-(1-\rho)^{k+1}}\end{cases}$
konstante Addition	M3	$\underline{P}'(k+1)=P(k+1)+G^*$, wobei G^* eine Diagonalmatrix mit den Elementen q_{ii} ist.

Tabelle 4.1. Verfahren zur Konvergenzverbesserung der Parameter

Der Modellansatz III ermöglicht es nun, das unterschiedliche Konvergenzverhalten der Einzelmodelle mit verschiedenen Wichtungsfaktoren und sogar mit verschiedenen Wichtungsverfahren zu verbessern. Bei der Wahl der optimalen Verfahren und Faktoren können die Erkenntnisse aus der Identifikation von Eingrößensystemen übernommen werden.

Ein wesentlicher Vorteil unterschiedlicher Wichtungsfaktoren tritt dann auf, wenn ein Einzelsystem zeitvariante Parameter besitzt (siehe Kap. 4.3). In diesem Fall ist es möglich, ausschließlich das variante Einzelmodell mit einem starken Wichtungsfaktor zu versehen, ohne daß dabei eine Beeinträchtigung der Schätzung der zeitinvarianten Parameter der anderen Einzelmodelle auftritt.

4.3. Die Identifikation eines zeitvarianten Einzelsystems innerhalb eines Mehrgrössensystems

Bei der Prozeßidentifikation wird ein System als zeitvariant in den Parametern bezeichnet, wenn während der Meßreihe, die zur Identifikation verwandt wird, eine Veränderung der Parameter der diskreten Übertragungsfunktionen stattfindet. In den vergangenen Jahren haben sich nur wenige Veröffentlichungen mit der Identifikation zeitvarianter Eingrößensysteme beschäftigt (Bauer (1977), Kopacek (1978), Schenk und Scheurer (1976), Kreuzer (1977)). Die Problematik der Identifikation zeitvarianter Mehrgrößensysteme ist bislang noch nicht behandelt worden. In dieser Arbeit sollen nur solche Mehrgrößensysteme betrachtet werden, in denen *ein* Einzelsystem zeitvariante Parameter besitzt, während alle anderen Einzelsysteme invariante Parameter aufweisen. Dies ist ein recht häufig auftretender Anwendungsfall.

Ausgehend von einem Teilmodell gemäß Bild 2.6 und der zugehörigen Übertragungsfunktion, Gl.(2.16),

$$\hat{Y}_i(z) = \left[\frac{\bar{B}_{i1}(z^{-1})}{\bar{A}_{i1}(z^{-1})}, \ldots, \frac{\bar{B}_{ir_i}(z^{-1})}{\bar{A}_{ir_i}(z^{-1})} \right] \begin{bmatrix} \bar{U}_{i1}(z) \\ \vdots \\ \bar{U}_{ir_i}(z) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

wird angenommen, daß man das Systemverhalten eines zeitvarianten Systems durch eine Übertragungsfunktion

$$\bar{G}_{i1}(z) = \frac{\bar{B}_{i1}(z^{-1})}{\bar{A}_{i1}(z^{-1})} = \frac{b_{1,i1}z^{-1} + \ldots + b_{n_{i1},i1}z^{-n_{i1}}}{1 + a_{1,i1}z^{-1} + \ldots + a_{n_{i1},i1}z^{-n_{i1}}} \tag{4.7}$$

mit zeitvarianten Parametern beschreiben kann. Die zeitliche Veränderung der Parameter soll dabei gegenüber der Dynamik des betreffenden Übertragungssystems langsam sein. Wird zur Identifikation der Teilmodellansatz verwendet, so muß zur Berechnung des Gleichungsfehlers der gemeinsame Nenner gebildet werden

$$E_i(z) = A_i^*(z^{-1})\ Y_i(z) - B_{i1}^*(z^{-1})\ \bar{U}_{i1}(z) - \ldots - B_{ir_i}^*(z^{-1})\ \bar{U}_{ir_i}(z)\ , \tag{4.8}$$

wobei

$$A_i^*(z^{-1}) = \prod_{j=1}^{r_i} \bar{A}_{ij}(z^{-1}) \tag{4.9}$$

$$B_{ij}^*(z^{-1}) = \frac{\bar{B}_{ij}(z^{-1})}{\bar{A}_{ij}(z^{-1})} A_i^*(z^{-1}) \tag{4.10}$$

ist. Die Gln.(4.9) und (4.10) verdeutlichen, daß die zeitvarianten Parameter des Einzelmodells $\bar{G}_{i1}(z)$ mit allen zeitinvarianten Parametern der anderen Einzelmodelle verknüpft werden. Dadurch werden alle Parameter der Gl.(4.8) zeitvariant, wobei insbesondere für den Parameter a_{n_i} bei Systemen höherer Ordnung der Änderungsbetrag innerhalb der Schätz- und Meßgenauigkeit liegt und somit nicht wahrgenommen werden kann.

Der Einzelmodellansatz besitzt den Vorteil, die Bildung des gemeinsamen Nenners des Teilmodells zu umgehen. Die Parameter des zeitvarianten Einzelmodells werden unabhängig von den Parametern der anderen Einzelmodelle geschätzt. Durch diese Separation des zeitvarianten Einzelmodells ist die Anwendung der Methoden und der Erfahrungen der Identifikation zeitvarianter Eingrößensysteme möglich.

An einem Beispiel sollen die Möglichkeiten der Identifikation eines zeitvarianten Einzelsystems innerhalb eines Mehrgrößensystems aufgezeigt werden.

Beispiel: Es wird ein Teilsystem mit den drei Eingangsgrößen $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ und der Ausgangsgröße y betrachtet (Bild 4.4).

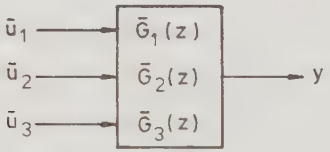


Bild 4.4. Teilsystem mit 3 Eingängen, wobei vereinbarungsgemäß die Übertragungsfunktion $\bar{G}_1(z)$ zeitvariante Parameter besitzt.

Die Übertragungsfunktionen $\bar{G}_2(z)$ und $\bar{G}_3(z)$ haben konstante Parameter und die Ordnung $n_2 = n_3 = 2$. Das zeitvariante Einzelsystems soll durch die Übertragungsfunktion

$$\bar{G}_1(z) = \frac{\bar{B}_1(z^{-1})}{\bar{A}_1(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \qquad (4.11)$$

beschrieben werden.

Eine Änderung des dynamischen Verhaltens entspricht einer Änderung der Parameter a_1 und b_1 in jeweils entgegengesetzter Richtung mit gleicher Amplitude. Im folgenden wird daher nur a_1 betrachtet. Der Parameter wird sinusförmig mit der Änderung

$$\Delta a_1 = 0.1 \sin (f \cdot t \cdot \frac{\Pi}{180}) \qquad (4.12)$$

variiert, wobei f den Frequenzfaktor und t den Meßzeitpunkt angibt. Die Parametervariation ist in Bild 4.5 graphisch darge-

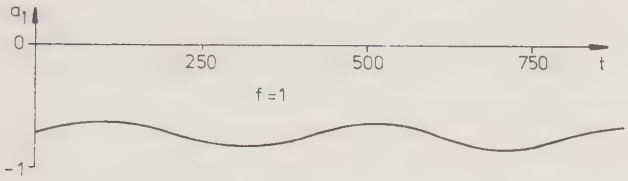


Bild 4.5. Änderung des Parameters a_1 der Übertragungsfunktion $\overline{G}_1(z)$

stellt. Durch diese Änderung des Parameters wird das Ausgangssignal gemäß Bild 4.6 beeinflußt. Wird das Teilsystem mit dem Teil-

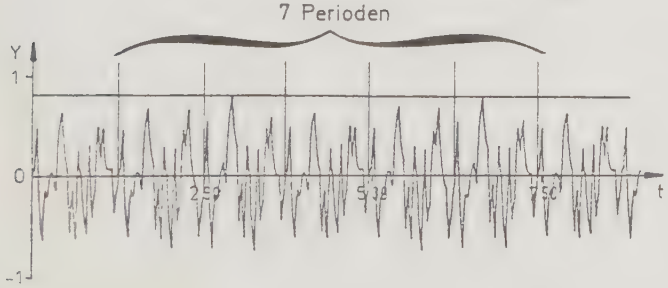


Bild 4.6. Einfluß der Parametervariation auf das Ausgangssignal

modellansatz identifiziert, so variieren alle Parameter des gemeinsamen Nenners. Als Beispiel sei die Variation des Parameters $\hat{a}_5$ des gemeinsamen Nenners in Bild 4.7 dargestellt.

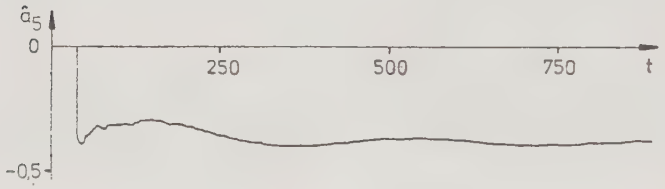


Bild 4.7. Änderung des Parameters $\hat{a}_5$ des gemeinsamen Nenners des Teilmodellansatzes

Eine Verbesserung in der Nachführung der Änderung konnte auch mit stärkeren Wichtungsfaktoren nicht erzielt werden. Erfahrungsgemäß ist bei Systemen mit höherer Ordnung aufgrund der langsameren Konvergenz der geschätzten Parameter eine Variation derselben überhaupt nicht mehr erkennbar.

Ein wesentlich besseres Ergebnis wurde unter Verwendung des Einzelmodellansatzes erzielt. Für den Frequenzfaktor f = 1 in Gl.(4.12) konnte eine schnelle und gute Anpassung des geschätzten an den wahren Parameterverlauf erzielt werden (Bild 4.8).

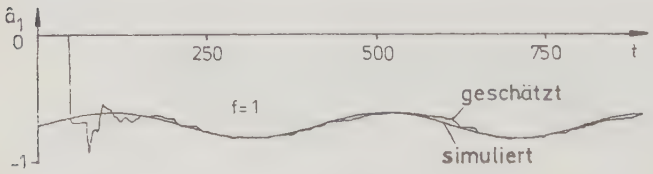


Bild 4.8. Schätzung des Parameters a_1 in Gl.(4.11) unter Verwendung des Einzelmodellansatzes

Wird der Frequenzfaktor f erhöht (Bild 4.9), so ist die Anpassung an den sich ändernden Parameter nicht so schnell und exakt.

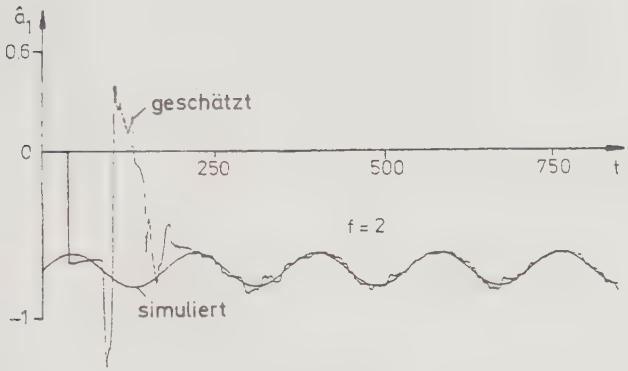


Bild 4.9. Schätzung des Parameters a_1 bei einer schnelleren Parameteränderung (f = 2)

Dieses Beispiel zeigt, daß die Identifikation eines zeitvarianten Einzelmodells innerhalb eines Mehrgrößensystems bei Verwendung des Einzelmodellansatzes möglich ist. Die Untersuchungen haben jedoch auch ergeben, daß aufgrund der Parameteränderung die für den Einzelmodellansatz notwendige Signalschätzung häufig nicht mit dem Teilmodellansatz durchführbar ist. Das Problem kann dadurch umgangen werden, daß alle Ausgänge der zeitinvarianten Einzelmodelle mit dem Teilmodell bestimmt werden und der Ausgang des zeitvarianten Einzelmodells $\overline{G}_{i1}(z)$ mit

$$\tilde{Y}_{i1}(z) = Y_i(z) - \sum_{j=2}^{r_i} \tilde{Y}_{ij}(z) \qquad (4.13)$$

berechnet wird. Obwohl bei diesem Vorgehen dem Einzelmodellausgang $\tilde{Y}_{i1}$ die gesamten Störungen des Teilmodells überlagert wer-

den, hat sich gezeigt, daß Gl.(4.13) eine Berechnungsalternative zu einer schlechten Schätzung des Ausgangssignals mit dem Signalmodell sein kann. Für die Identifikation zeitvarianter Systeme ist nicht die Art der überlagerten Störung, sondern vielmehr die Art und die zeitliche Folge der Parameteränderung von Bedeutung. Nur bei einer relativ langsamen Bewegung der Parameter ist eine Schätzung mit den o. a. Parameterschätzverfahren möglich. Von Kreuzer (1977) werden diese Systeme deshalb sogar als quasiinvariant bezeichnet.

5. Die Strukturprüfung von Mehrgrößensystemen

Der Entwurf eines Modells für Mehrgrößensysteme beginnt damit, daß die physikalischen Zusammenhänge zwischen den Ein- und den Ausgangsgrößen und zwischen den Ausgangsgrößen selbst durch die Zuordnung von Übertragungsfunktionen erfaßt werden. Besonders in komplexen realen Systemen wird hierbei bereits eine Wertung der Einflußgrößen und eine eventuell mögliche Vernachlässigung von für die Zielsetzung nicht wichtigen Eingangsgrößen durchgeführt. Es wird meist nur solchen Ein- und Ausgangsgrößen eine Übertragungsfunktion zugeordnet, die das dynamische und statische Verhalten des Prozesses wesentlich beeinflussen. Ein weiteres Auswahlkriterium besteht darin, daß man ausschließlich die Stell- und Regelgrößen als Ein- bzw. Ausgangssignale zuläßt, während man die anderen, evtl. auch wichtigen Eingangsgrößen als Störanteil zusammenfaßt. Beim Entwurf wird also bereits der spätere Verwendungszweck des Modells berücksichtigt.

Bei der Identifikation muß zusätzlich darauf geachtet werden, daß die Ein- und Ausgangssignale eines nach obigen Gesichtspunkten entworfenen Modells ständig erregt sind, um numerische Schwierigkeiten bei der Anwendung rekursiver Schätzalgorithmen zu vermeiden. Diese Bedingung erschwert oftmals die Auswahl geeigneter Meßreihen so sehr, daß teilweise eine weitere Vernachlässigung von Einflußgrößen für bestimmte Meßreihen notwendig wird. Die Bestimmung eines allgemeingültigen Modells ist dann nur durch die Auswertung mehrerer Meßreihen möglich.

Die Voraussetzung, daß die Ordnungen n_i bzw. n_{ij} der Übertragungsfunktionen bekannt sind, ist bei realen Systemen meist nicht erfüllt. Vielmehr wird man aufgrund der Kenntnisse der physikalischen Gegebenheiten des Prozesses oft nur in der Lage sein, eine Einschränkung des möglichen Bereiches für die Modellordnungen vorzunehmen. Für die Identifikation von Eingrößensystemen sind eine Reihe von Verfahren entwickelt worden, die anhand der

Prozeßsignale und der Schätzergebnisse eine genauere Festlegung der Modellordnung ermöglichen (vgl. Unbehauen und Göhring (1973, 1974b)). In der vorliegenden Arbeit werden einige dieser Verfahren auf die Möglichkeit hin untersucht, sie auch bei der Identifikation von Mehrgrößensystemen einsetzen zu können. Nach der Vorstellung der einzelnen Verfahren wird ihre Leistungsfähigkeit anhand eines Beispiels dargestellt.

Die Verfahren lassen sich nach der Art ihrer Beurteilung in drei Gruppen einteilen:

1) Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnungen

In den Verfahren wird mit den Ein- und Ausgangssignalen eine Datenmatrix aufgebaut, die in Abhängigkeit der Ordnung auf Singularität geprüft wird. Die Verfahren besitzen den Vorteil, vor der eigentlichen Parameterschätzung durchgeführt werden zu können. Dadurch sind sie jedoch nur bei Verwendung des Teilmodellansatzes einsetzbar.

2) Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung bewerten

Die Verfahren beurteilen die während der Parameterschätzung entstandenen Gleichungsfehler oder einen nach der Schätzung durchgeführten Vergleich des System- mit dem Modellausgangssignal bei gleichen Eingangssignalen. Der Vorteil der Verfahren liegt darin, daß sie die Parameterschätzergebnisse bewerten.

3) Verfahren, die die geschätzte Übertragungsfunktion bewerten

Es werden keine Signale, sondern die Übertragungsfunktionen untersucht, z.B. bezüglich der Pol-/Nullstellenverteilung.

5.1. Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnung

5.1.1 Der Determinantenverhältnistest (DR)

Der Determinantenverhältnistest (determinant ratio, DR) wurde für Eingrößensysteme von Woodside (1971) vorgeschlagen. Er wird im folgenden in der erweiterten Form für die Überprüfung eines Teilmodells dargestellt.

Der Test basiert auf der Untersuchung der $\left[(r_i+1)\hat{n}_i,(r_i+1)\hat{n}_i\right]$-Produkt-Momenten-Matrix

$$\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \underline{m}_i(k,\hat{n}_i)\,\underline{m}_i^T(k,\hat{n}_i) \quad , \tag{5.1}$$

welche sich mit Hilfe des Meßwertvektors $\underline{m}_i$, Gl.(3.3), berechnet. Die Zahl N bezeichnet die Anzahl der Meßpunkte. Voraussetzung für die Untersuchung ist, daß die Eingangsfolgen $\bar{u}_j(k)$, $k = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, r_i$ in sich genügend unabhängig sind.

Ist dies der Fall, so wird bei einer zu groß angenommenen Ordnung $\hat{n}_i$ eine schlechte Kondition der Datenmatrix bei einer Invertierung auftreten. Die Determinante der Matrix Q besitzt aufgrund des Rangabfalls der Matrix für $\hat{n}_i > n_i$ die Eigenschaft

$$\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_i)\}\begin{cases} > 0 & \text{für } \hat{n}_i \le n_i \\ = 0 & \text{für } \hat{n}_i > n_i \end{cases} \quad . \tag{5.2}$$

Bildet man nun das Verhältnis der Determinante der Datenmatrix $\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_i)$ zur Determinante der Datenmatrix $Q(\underline{m}_i,\hat{n}_i+1)$

$$DR(\hat{n}_i) = \frac{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_i)\}}{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_i+1)\}} \quad , \tag{5.3}$$

so wird aufgrund der Bedingungen in Gl.(5.2) das Determinantenverhältnis $DR(\hat{n}_i = n_i)$ gegenüber den Zahlen $DR(\hat{n}_i < n_i)$ sehr stark

ansteigen. Das Kriterium besteht also darin, daß man die Determinantenverhältnisse für verschiedene Ordnungen bildet und diejenige Ordnung $\hat{n}_i$ als die wahrscheinlichste Ordnung n_i auswählt, bei der das Determinantenverhältnis stark ansteigt.

5.1.2 Der erweiterte Determinantenverhältnistest (EDR)

Der DR-Test setzt voraus, daß den Ein- und Ausgangssignalen keine Störungen $\underline{z}_i$ überlagert sind. Ist dies jedoch der Fall, so muß versucht werden, die Störungen bei der Bildung der Datenmatrix zu berücksichtigen. Unter der Annahme, daß die Kovarianzmatrizen $\underline{R}_i(\underline{z}_i)$ der Störungen

$$\mathrm{cov}(\underline{z}_i) = E\left[\underline{z}_i \cdot \underline{z}_i^T\right] = \underline{R}_i(\underline{z}_i) \tag{5.4}$$

bekannt sind, kann der erweiterte Determinantenverhältnistest angewandt werden. Sind die Störungen untereinander unabhängig, ist nur die Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix mit den Varianzen σ_{jj}^2 besetzt. Die Datenmatrix für den EDR-Test ist definiert als

$$\hat{\underline{Q}}(\underline{m}_i, \hat{n}_i) = \underline{Q}(\underline{m}_i, \hat{n}_i) - \underline{R}_i(\underline{z}_i) \ . \tag{5.5}$$

Entsprechend dem DR-Test kann das Determinantenverhältnis

$$\mathrm{EDR}(\hat{n}_i) = \frac{\det\{\hat{\underline{Q}}(\underline{m}_i, \hat{n}_i)\}}{\det\{\hat{\underline{Q}}(\underline{m}_i, \hat{n}_i+1)\}} \tag{5.6}$$

gebildet werden und die Beurteilung der wahrscheinlichsten Ordnung nach den oben beschriebenen Kriterien durchgeführt werden.

5.1.3 Der Instrumentelle Determinantenverhältnistest (IDR)

Bei diesem Test wird versucht, wie beim EDR-Test die Störungen z_i bei der Bildung der Produkt-Momenten-Matrix zu berücksichtigen. Die Störungen sind hier jedoch ausschließlich den Ausgangssignalen zugeordnet, während die Eingangssignale als exakt meßbar

angenommen werden. Da die Verwendung der gestörten Ausgangssignale zu einer fehlerhaften Ordnungsbestimmung führen würde, versucht man mit Hilfe eines Instrumentellen Variablen (IV)-Modells die ungestörten Ausgangssignale zu schätzen, um dann anstelle des Meßwertvektors $\underline{m}_i$ den IV-Vektor $\underline{w}_i$ zur Berechnung der Produkt-Momenten-Matrix zu verwenden.

Die Datenmatrix des IDR-Testes berechnet sich also nach

$$\underline{Q}(\underline{m}_i,\underline{w}_i,\hat{n}_i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \underline{w}_i(k,\hat{n}_i)\ \underline{m}_i^T(k,\hat{n}_i) \quad , \tag{5.7}$$

wodurch sich für das Determinantenverhältnis

$$IDR(\hat{n}_i) = \frac{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\underline{w}_i,\hat{n}_i)\}}{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\underline{w}_i,\hat{n}_i+1)\}} \tag{5.8}$$

ergibt. Das Beurteilungskriterium des IDR-Testes entspricht dem des DR- und EDR-Testes.

Dieses Verfahren wurde von Wellstead (1978) vorgestellt und von Young (1980) bezüglich des IV-Schätzalgorithmus untersucht. Durch die Einführung eines IV-Signalschätzers, der ja zunächst selbst geschätzt werden muß, handelt es sich eigentlich nicht mehr um ein Verfahren zur a priori-Bestimmung der Modellordnung.

5.1.4 Der Determinantenverhältnistest für Mehrgrößensysteme von Guidorzi (1975) (MDR-Test)

Beim DR-Test wurde davon ausgegangen, daß alle Polynome in Gl. (2.22) aufgrund des gemeinsamen Nenners die gleiche Ordnung besitzen. Eine Pol-Nullstellenkürzung wurde nicht betrachtet. Geht man jedoch von der Möglichkeit aus, daß die einzelnen Übertragungsfunktionen eigene, unterschiedliche Ordnungen besitzen, so können diese Ordnungen n_ν mit der Variation des DR-Testes nach Guidorzi (1975) geschätzt werden.

Man ordnet jedem Teilvektor im Meßwertvektor, Gl.(3.3), eine Ordnung $\hat{n}_{i\nu}(\nu = 1,2,\ldots,r_i + 1)$ gemäß folgendem Schema zu:

$$\underline{m}_i^T = \left[\underline{m}_{yi}^T \;\middle|\; \underline{m}_{ui1}^T \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; \underline{m}_{uir_i}^T\right] , \tag{5.9}$$

$$\underline{L}^T = \left[\hat{n}_{i1} \;\middle|\; \hat{n}_{i2} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; \hat{n}_{i(r_i+1)}\right] . \tag{5.10}$$

Somit erhält man (r_i+1)-Ordnungen für das Teilmodell i. Die Erhöhung der Ordnungen der Teilvektoren geschieht nun, im Gegensatz zum DR-Test, nicht gemeinsam, sondern die Ordnungen $\hat{n}_{i\nu}$ werden einzeln nach folgendem Schema erhöht:

$$\underline{L}^T = \left[\hat{n}_{i1}, \hat{n}_{i2}, \hat{n}_{13}, \ldots, \hat{n}_{i(r_i+1)}\right]$$

1	1	1	...	1	1. Schritt
2	1	1	...	1	2. Schritt
2	2	1	...	1	.
⋮	⋮	⋮		⋮	.
2	2	2	...	2	.
3	2	2	...	2	
⋮	⋮	⋮		⋮	

Eine Ordnung $\hat{n}_{i\nu}$ gilt dann als die wahrscheinlichste Ordnung $n_{i\nu}$, wenn der Determinantenverhältnistest

$$MDR(\hat{n}_{i1},..,\hat{n}_{i\nu},..,\hat{n}_{i(r_i+1)}) = \frac{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_{i1},..,\hat{n}_{i\nu},..,..,\hat{n}_{i(r_i+1)}\}}{\det\{\underline{Q}(\underline{m}_i,\hat{n}_{i1},..,\hat{n}_{i\nu}+1,...,\hat{n}_{i(r_i+1)}\}} \tag{5.11}$$

einen deutlichen Anstieg anzeigt. Ist die Ordnung $n_{i\nu}$ eines Teilvektors bestimmt, wird sie bei den MDR-Tests konstant gehalten. Die Ordnungen der anderen Teilvektoren werden nach dem obigen Schema

nun solange erhöht, bis aufgrund des MDR-Testes alle Ordnungen bestimmt sind.

Durch diese Einzelbestimmung der Ordnungen der Teilvektoren ist eine Berücksichtigung von gleichen Anteilen im dynamischen Verhalten der Einzelmodelle bzw. eine Kompensation dieser Anteile möglich. Der Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß bei einer fehlerhaften Bestimmung einer Teilordnung die folgenden Ordnungsbestimmungen ebenfalls falsch sind, da der MDR-Test die Folgeberechnungen auf den Teilergebnissen aufbaut.

5.2. Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung beurteilen

5.2.1 Der Signalfehlertest

Der Test basiert auf dem Grundgedanken, daß das Ausgangsverhalten des Systems am besten von dem Modell nachgebildet werden kann, welches die Ordnung $\hat{n}_i = n_i$ besitzt. Im ersten Schritt des Testes wird man also Modelle mit unterschiedlichen Ordnungen schätzen. Danach erregt man das System und die verschiedenen Modelle mit den gleichen Eingangssignalen. Beim Teilmodellansatz müssen die Eingangssignale der Einzelsysteme untereinander unabhängig sein, um eine eindeutige Zuordnung der dynamischen und statistischen Eigenschaften zu den einzelnen Übertragungsfunktionen zu erreichen.

Aus dem Vergleich des Verlaufs der Fehler

$$e_i^{(\hat{n}_i)} = y_i - \hat{y}_i^{(\hat{n}_i)} \tag{5.12}$$

wird diejenige Ordnung $\hat{n}_i$ als die wahrscheinlichste Ordnung des Teilsystems bzw. des Einzelsystems gewählt, deren Fehler $e_i^{(\hat{n}_i)}$ gegenüber dem Fehler $e_i^{(n_i-1)}$ bedeutend geringer ist (Göhring (1973)).

Eine Übertragung des Signalfehlertestes auf die Parameteridentifikation mit dem Einzelmodellansatz ist prinzipiell möglich, jedoch treten aufgrund der Kombinationsvielfalt der Ordnungen $\hat{n}_{ij}$ die im MDR-Test genannten Nachteile auf. Die Schwierigkeiten werden umgangen, wenn angenommen wird, daß das Signalmodell hinreichend genaue Ausgangssignalschätzungen ermöglicht. Es kann dann direkt der Fehler

$$e_{ij}^{(\hat{n}_{ij})} = \tilde{y}_{ij} - \hat{y}_{ij}^{(\hat{n}_{ij})} \tag{5.13}$$

verglichen werden.

5.2.2 Der Verlustfunktionstest

Der Verlustfunktionstest basiert auf der Untersuchung der summierten, quadrierten Gleichungsfehler e_i für verschiedene Ordnungen $\hat{n}_i$. Hierzu wird die Verlustfunktion

$$V_i^{(\hat{n}_i)} = \frac{1}{N-\hat{n}_i-1} \sum_{k=\hat{n}_i+1}^{N} \left[e_i^{(\hat{n}_i)}(k) \right]^2 \tag{5.14}$$

definiert, wobei $e_i^{(\hat{n}_i)}$ nach Gl.(5.12) berechnet wird.

Entsprechend der Ordnungswahl im Signalfehlertest wird diejenige Ordnung $\hat{n}_i$ als die wahrscheinlichste Ordnung des Systems ausgewählt, deren Verlustfunktion $V_i^{(\hat{n}_i)}$ bedeutend geringer ist als die Verlustfunktion $V_i^{(\hat{n}_i-1)}$. Wird die Verlustfunktion schon während der Identifikation bestimmt, so wird $e_i^{(\hat{n}_i)}$ mit Hilfe der Gl.(3.17d) berechnet.

Eine Übertragung des Verlustfunktionstestes auf die Parameteridentifikation mit dem Einzelmodellansatz ist entsprechend der Vorgehensweise beim Signalfehlertest möglich.

5.2.3 Der statistische F-Test

Der F-Test ist ein statistisches Verfahren, welches anhand der Verlustfunktionen prüft, mit welchem Modell minimaler Ordnung das System darstellbar ist. Mit Hilfe einer Testgröße F wird festgestellt, ob sich die nach Gl.(5.14) berechnete Verlustfunktion V_1 wesentlich von der Verlustfunktion V_2 unterscheidet. Ist dies nicht der Fall, so wird die Ordnung des Modells mit der Verlustfunktion V_1 als die wahrscheinlichste Ordnung des Systems bestimmt.

Für den F-Test wird zunächst die Testgröße F bestimmt mit

$$F = \frac{V_1 - V_2}{V_2} \cdot \frac{N - p_2}{p_2 - p_1} \quad . \tag{5.15}$$

Während N die Anzahl der Meßwerte angibt, ist p_1 und p_2 die Anzahl der zu schätzenden Parameter beider Modelle. Die Testgröße besitzt dann eine F-Verteilung, wenn die Modellfehler e_i normalverteilt und die Verlustfunktionen χ^2(Chi-Quadrat)-verteilte Zufallsvariablen sind.

Nach der Berechnung der Testgrößen werden diese mit den Werten aus den Tabellen der F-Verteilung (Sachs (1978)) unter Annahme einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit verglichen. Ist die Testgröße kleiner als der Tabellenwert, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Verlustfunktionen sich nur unwesentlich unterscheiden, größer als die Irrtumswahrscheinlichkeit. Eine Ordnung gilt dann als die wahrscheinlichste Ordnung des Systems, wenn sich die Verlustfunktion $V^{(\hat{n}_i)}$ bzw. $V^{(\hat{n}_i)}$ von der Verlustfunktion $V^{(\hat{n}_i+1)}$ bzw. $V^{(\hat{n}_i+1)}$ nur unwesentlich unterscheidet und die Testgröße erstmals kleiner als der Vergleichswert der Tabelle wird.

5.2.4 Der Final Prediction Error Test (FPE)

Dieser Test wurde von Akaike (1969, 1970) vorgestellt. Es wird diejenige Ordnung als die wahrscheinlichste Ordnung des Systems

bestimmt, bei der der Wert

$$FPE(\hat{n}_i) = \frac{N + p^{(\hat{n}_i)} + 1}{N - p^{(\hat{n}_i)} - 1} V(\hat{n}_i) \qquad (5.16)$$

minimal wird. Die Gleichung gilt entsprechend für die Bestimmung der Ordnungen der Einzelmodelle.

Von Söderström (1977) wurde die asymptotische Gleichheit des F- und des FPE-Testes bewiesen. Von Akaike (1978) wurde auch der "Information Criterion" (AIC)-Test vorgeschlagen. Da dieses AIC-Kriterium den Maximalwert der Likelihood-Funktion der Maximum-Likelihood-Methode benötigt, wird das Verfahren in dieser Arbeit nicht behandelt.

5.3. Verfahren zur Beurteilung der geschätzten Parameter

5.3.1 Der Polynom-Test

Der Polynom-Test ist das einzige Verfahren, in dem keine Signale, sondern die geschätzten Parameter der Übertragungsfunktion beurteilt werden. Für den Test ist es notwendig, die Pole und die Nullstellen der Übertragungsfunktion zu bestimmen.

Das Verfahren basiert auf dem Grundgedanken, daß bei einer zu groß geschätzten Ordnung die zusätzlichen Pole durch Nullstellen kompensiert werden. Die Ordnung gilt dann als bestimmt, wenn bei einer stetigen Verkleinerung der Ordnung erstmals keine Pol-Nullstellenkompensation auftritt.

Der Polynom-Test war bereits bei der Untersuchung der Teil- und der Einzelmodelle zur Beurteilung einer richtigen Parameterschätzung benutzt worden.

5.4. Vergleich der Strukturprüfverfahren

5.4.1 Der untersuchte Prozeß

Es handelt sich um ein Teilsystem mit 2 Eingängen und einem Ausgang, dessen Einzelübertragungsfunktionen in Tabelle 5.1 durch die Pol-/Nullstellenverteilung in der z-Ebene beschrieben werden.

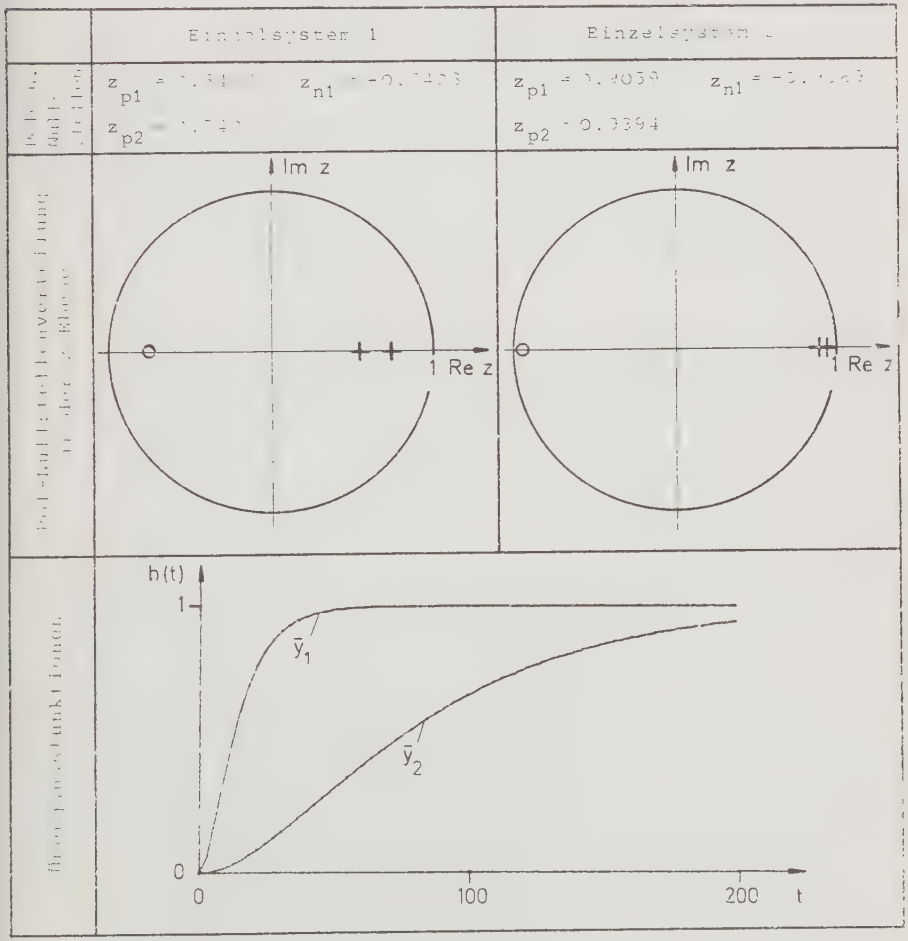


Tabelle 5.1. Testbeispiel zur Untersuchung der Strukturprüfverfahren

5.4.2 Leistungsfähigkeit der Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnung

Zur Ermittlung der Ordnung n_i des Teilsystems wurden die Datenmatrizen für die Ordnungen $\hat{n}_i = 1$ bis 6 aufgebaut. Beim DR-, EDR- und IDR-Test sind die Ordnungen der Teilvektoren im Meßwertvektor

$$\underline{m}_i^T(k) = \left[\underline{m}_{y_i}^T \mid \underline{m}_{u_{i1}}^T \mid \ldots \mid \underline{m}_{u_{ir_i}}^T \right] \tag{5.17}$$

stets gleich, so daß eine Erhöhung der Ordnung $\hat{n}_i$ um Eins eine Erweiterung des Vektors um $(r_i + 1)$-Elemente zur Folge hat. Die Datenmatrix wird sogar um $(r_i + 1)^2(1 + 2\hat{n}_i)$ Elemente erweitert, wodurch die Bildung der Determinantenverhältnisse für Modelle mit höheren Ordnungen sehr große Rechenzeiten benötigt.

Die Ergebnisse des *DR-*, *EDR-* und *IDR*-Testes sollen zusammengefaßt besprochen werden. Während beim DR-Test dem Ausgangssignal keine Störung überlagert wurde, enthielten die Ausgangssignale beim EDR- und IDR-Test ein gleichverteiltes Rauschsignal. Beim IDR-Test wurde mit Hilfe einer Testidentifikation ein Hilfsmodell ermittelt, mit dem die Hilfsvariablen des Vektors $\underline{w}_i$ bestimmt werden konnten.

Die Ergebnisse der drei Strukturprüfverfahren sind im Bild 5.1 zusammenfassend dargestellt. Es wird an dieser Stelle nochmals erwähnt, daß bei allen drei Verfahren diejenige Ordnung $\hat{n}_i$ als die wahrscheinlichste Ordnung des Systems bezeichnet wird, bei der die Determinantenverhältniszahl einen deutlichen und starken Anstieg gegenüber den Determinantenverhältniszahlen für niedrigere Ordnungen aufweist. Untersucht man unter diesem Gesichtspunkt die in einer halblogarithmischen Darstellung aufgetragenen DR-Zahlen, so ist bei keinem Verfahren eine Aussage über die wahrscheinlichste Ordnung des Systems möglich. Dies bedeutet, daß der DR-, der EDR- und IDR-Test für die Strukturprüfung von Mehrgrößensystemen nicht geeignet ist. Diese Aussage findet sich bezüglich des DR-Testes auch bei Morgner (1978).

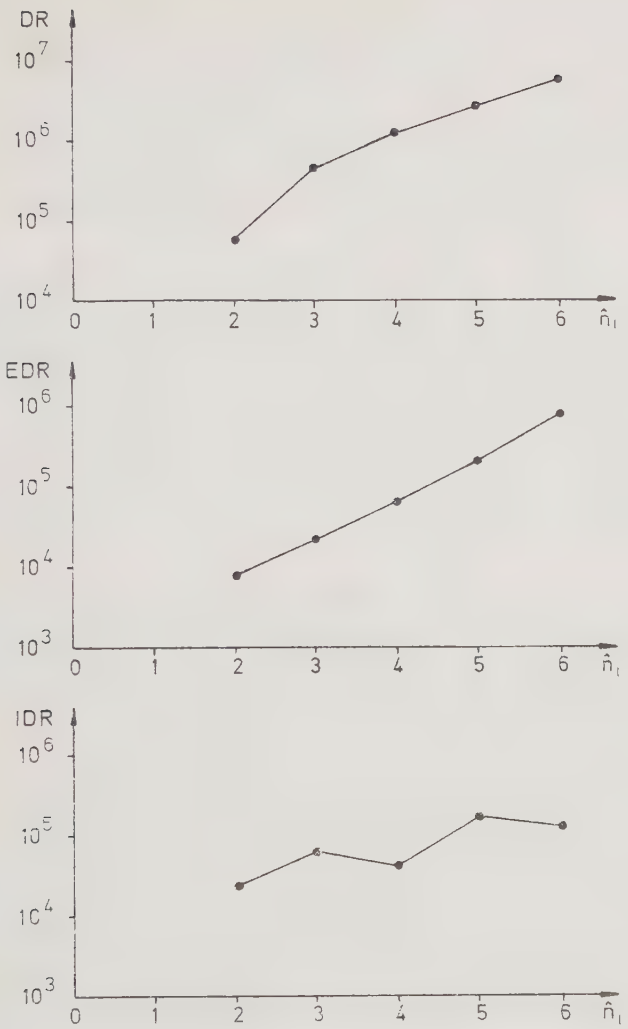


Bild 5.1. Ergebnisse des DR-, EDR- und IDR-Testes für die Ordnungsbestimmung des Testbeispiels

Ein wichtiger Grund für das Scheitern dieser drei Verfahren liegt in der Tatsache begründet, daß die Ordnungen der Teilvektoren in

Gl.(5.17) stets gleich groß sind. Dadurch kann nicht berücksichtigt werden, daß es gleiche Anteile im dynamischen Verhalten der einzelnen Übertragungsglieder gibt oder daß dynamische Anteile sich kompensieren können. Eine erfolgreiche Anwendung des DR-, EDR- und IDR-Testes wird also nur möglich sein, wenn die Übertragungsglieder sich in ihrem dynamischen Verhalten wesentlich unterscheiden.

Um diesen Nachteil zu umgehen, wurde von Guidorzi (1975) der MDR-Test entwickelt. Im Gegensatz zu den anderen Verfahren berücksichtigt er die Tatsache, daß das Teilmodell sich aus Einzelmodellen mit evtl. unterschiedlichen Ordnungen zusammensetzt. Die lineare Abhängigkeit muß daher für jeden Teilvektor $\underline{m}_{ij}$ in dem Vektor

$$\underline{m}_i^T = \left[\underline{m}_{y_i}^T \;\middle|\; \underline{m}_{u_{i1}}^T \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \underline{m}_{u_{ir_i}}^T \right] \tag{5.18}$$

gefunden werden. Diese Vorgehensweise ist gegenüber den anderen Verfahren sehr aufwendig. Der große Nachteil des Verfahrens liegt jedoch darin, daß während der Berechnung eine Singularität erkannt werden muß, und daß sich danach auf diesem ersten Teilergebnis die weitere Vorgehensweise in der Bestimmung aufbaut. Liegt z.B. ein Verlauf der Determinantenverhältnisse wie in Bild 5.1 vor, so könnte man nach den Werten für $\hat{n}_i = 1$ und $\hat{n}_i = 2$ noch keine Aussage treffen. Erst beim Wert für $\hat{n}_i = 3$ könnte man evtl. folgern, daß bei $\hat{n} = 1$ oder 2 eine Singularität vorgelegen haben könnte. Der MDR-Test muß dann neu begonnen werden, da evtl. auch andere Ordnungsbestimmungen sich auf diesem falschen Teilergebnis aufbauten. Bei der Strukturprüfung des Testbeispiels konnte kein eindeutiger Anstieg festgestellt werden, so daß kein Ergebnis erzielt werden konnte.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Von den Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnung zeigte keine Methode zufriedenstellende Ergebnisse. Eine wie bei Eingrößen-

systemen einwandfreie Bestimmung ist nicht möglich. Hinzu kommt, daß die IDR-Methode und das Verfahren von Guidorzi sehr aufwendige Verfahren sind, die den eigentlichen Vorteil der a priori-Verfahren aufheben.

5.4.3 Leistungsfähigkeit der Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung bewerten

Die Identifikation unter Verwendung des Teilmodellansatzes hat gezeigt, daß das Ausgangssignal auch mit falschen Parametern sehr gut vorhergesagt werden konnte. Die Ordnungsbestimmungsverfahren, die auf einer Bewertung der Ausgangssignalschätzung beruhen, sind daher bestens geeignet, eine mögliche Ordnungsreduktion der Teilmodelle aufzuzeigen. Die ermittelte Ordnung der Teilmodelle wird daher nicht mit der wahren Ordnung übereinstimmen, sondern sie wird zeigen, welche Ordnungsreduktion bei gleich guter Schätzung der Ausgangssignale möglich ist.

Beim Einzelmodellansatz hingegen müssen mit diesen Verfahren die wahren Ordnungen ermittelt werden können. Es wurden Identifikationsläufe mit N = 1500 Meßpunkten durchgeführt, wobei jeweils die gleichen Eingangssignale verwendet wurden. Dem Ausgangssignal wurde ein gleichverteiltes Rauschsignal überlagert.

Beim *Signalfehlertest* des Teilmodellansatzes werden die Fehler zwischen dem gemessenen Ausgangssignal y_i und den mit verschiedenen Ordnungen geschätzten Modellausgängen $\hat{y}_i$ verglichen. Als Eingangssignal wurde eine Sprungfunktion aufgegeben. Der Verlauf der Fehlersignale ist im Bild 5.2 dargestellt.

Aus dem Bild kann entnommen werden, daß der Fehler erstmals bei den Ordnungen

$$\hat{n}_i = 3 \qquad \hat{n}_{i1} = 2 \qquad \hat{n}_{i2} = 2$$

sehr klein wird. Damit wurden die Ordnungen der Einzelübertragungsfunktionen richtig bestimmt. Für das Teilsystem wurde die minimale Ordnung bei gleicher Güte der Ausgangssignalschätzung mit $\hat{n}_i = 3$ bestimmt. Liegt ein gestörtes System vor, ist der Signalfehlertest nur bedingt geeignet.

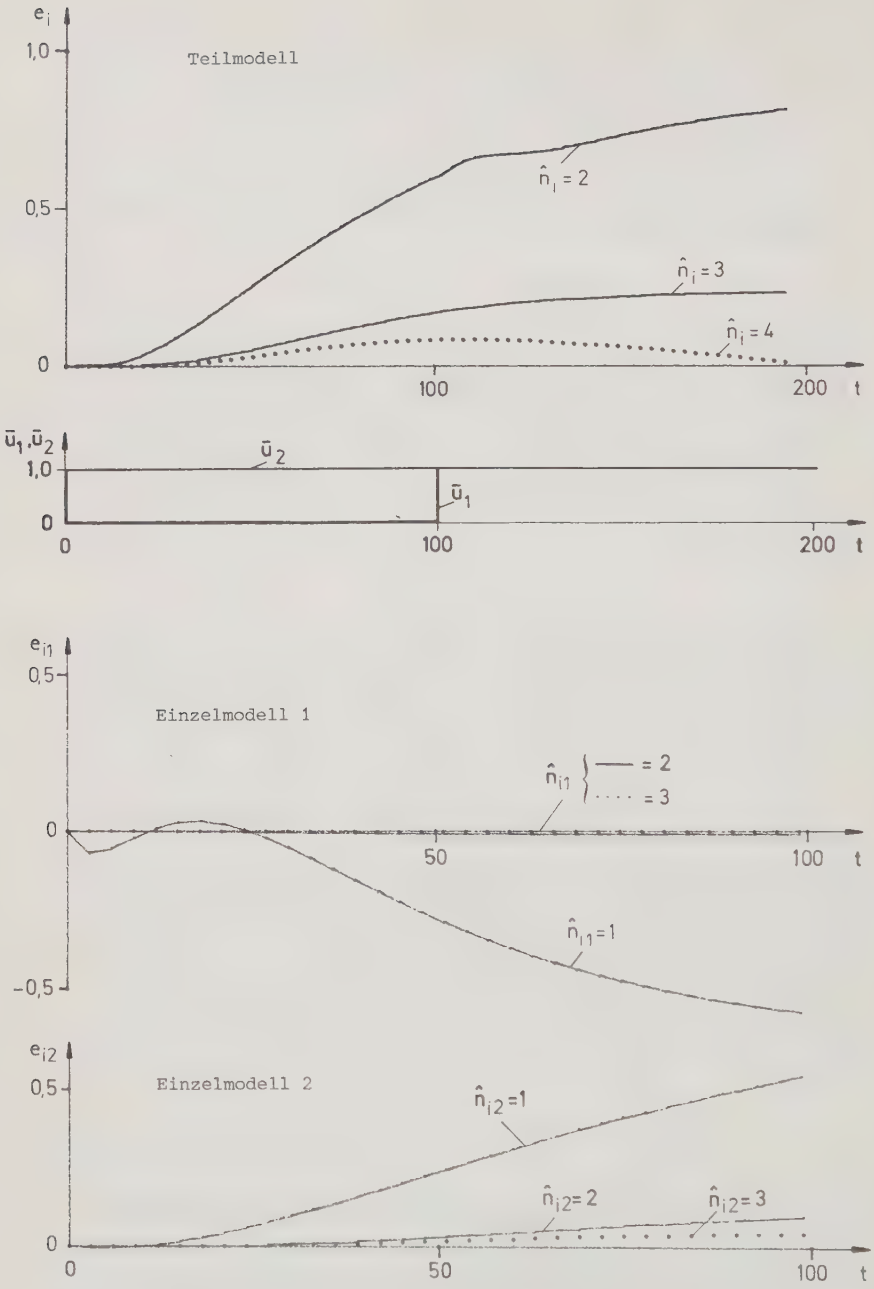


Bild 5.2. Signalfehlertest des Teilmodells und der Einzelmodelle

Die *Verlustfunktionen* für das Teilmodell und die Einzelmodelle mit verschiedenen Ordnungen wurden während eines Identifikationslaufes berechnet und in Bild 5.3 dargestellt.

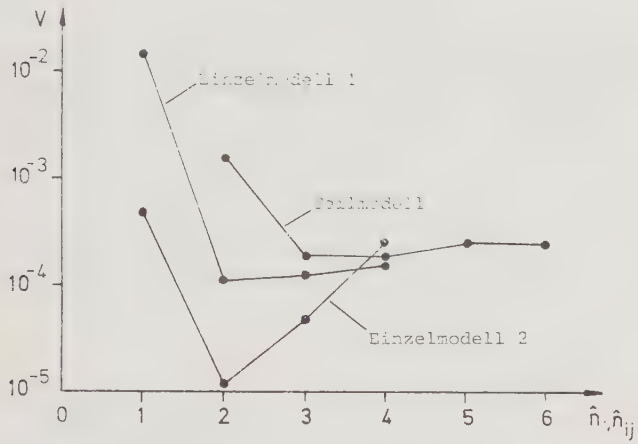


Bild 5.3. Verlauf der Verlustfunktionen

Aus dem Verlauf der Funktionen werden die Ordnungen bestimmt zu

$$\hat{n}_i = 3, \quad \hat{n}_{i1} = 2, \quad \hat{n}_{i2} = 2 \ .$$

Während die Ordnungen der Einzelmodelle exakt ermittelt werden, kann das Teilmodell bei gleich guter Ausgangssignalschätzung auch mit der Ordnung $\hat{n}_i = 3$ statt der wahren Ordnung $n_i = 4$ realisiert werden. Der Verlustfunktionstest hat sich auch bei stärker gestörten oder komplexeren Mehrgrößensystemen als relativ sicher und zuverlässig erwiesen.

Der *F-Test* untersucht den Unterschiedsbetrag der Verlustfunktionen. Dazu wird die Testgröße F nach Gl.(5.15) berechnet und mit den Ta-

bellenwerten der F-Verteilung verglichen. Die Testgrößen für das Teilmodell und die Einzelmodelle wurden in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

	Teilmodell				Einzelmodell 1			Einzelmodell 2		
n_i \ n_i+k	3	4	5	6	2	3	4	2	3	4
1	nicht möglich				$>10^5$	$>10^5$	$>10^5$	$>10^5$	$>10^4$	$>10^4$
2	$>10^3$	$>10^3$	$>10^3$	$>10^2$	-	0	0	-	0	0
3	-	1.71	0	0	-	-	0	-	-	0
4	-	-	0	0	nicht durchgeführt					
5	-	-	-	0						

Tabelle 5.2. Testgrößen F für das Teilmodell und die Einzelmodelle

Negative Testgrößen, die bei einer Vergrößerung der Verlustfunktion entstehen, wurden mit einer Null gekennzeichnet.

Die Auswertung der Testergebnisse ist für die Einzelmodelle direkt ohne den Vergleich mit den Tabellenwerten der F-Verteilung möglich. Die Testgrößen F für die Ordnung $n_{i1} = 1$ und $n_{i2} = 1$ sind so groß, daß daraus auf einen wesentlichen Unterschied der Verlustfunktionen geschlossen werden kann. Die Ordnungen $\hat{n}_{i1} = \hat{n}_{i2} = 1$ scheiden daher aus. Für die Ordnungen $\hat{n}_{i1} = 2$ und $\hat{n}_{i2} = 2$ treten negative Testgrößen auf. Dies bedeutet, daß die Verlustfunktionen wieder angestiegen sind. Die minimalen Verlustfunktionen traten also bei $\hat{n}_{i1} = 2$ bzw. $\hat{n}_{i2} = 2$ auf, so daß dies die wahrscheinlichsten Ordnungen der Einzelmodelle sind.

Beim Teilmodell sind die Testgrößen F für die Ordnung $\hat{n}_i = 2$ ebenfalls so groß, daß auf einen wesentlichen Unterschied der Verlustfunktionen geschlossen werden kann. Für die Ordnung $\hat{n}_i = 3$ lautet die Testgröße F = 1.71. Da F unter dem Vergleichswert der F-Verteilung (P = 95 % Fraktile) liegt (siehe Sachs (1978)), ist der Unterschiedsbetrag zwischen den Verlustfunktionen $V_1^{(\hat{n}_i=3)}$ und $V_2^{(\hat{n}_i=4)}$ so gering, daß daraus geschlossen werden kann, daß ein Modell mit der Ordnung $\hat{n}_i = 3$ nicht wesentlich schlechtere Ausgangssignale schätzt als ein Modell mit der Ordnung $\hat{n}_i = 4$. Die minimale Modellordnung ist daher $\hat{n}_i = 3$. Der F-Test liefert damit die gleichen Ergebnisse wie der Verlustfunktionstest.

Wie bereits erwähnt, zeigt der *FPE-Test* das gleiche asymptotische Verhalten wie der F-Test (Söderström (1977)). Die in Tabelle 5.3 zusammengestellten Ergebnisse beweisen dies.

Ordnung / FPE-Wert	1	2	3	4
Teilmodell	-	$0.17 \cdot 10^{-3}$	$\underline{0.190 \cdot 10^{-4}}$	$0.20 \cdot 10^{-4}$
Einzelmodell 1	$0.15 \cdot 10^{-2}$	$\underline{0.12 \cdot 10^{-4}}$	$0.124 \cdot 10^{-4}$	$0.15 \cdot 10^{-4}$
Einzelmodell 2	$0.39 \cdot 10^{-4}$	$\underline{0.13 \cdot 10^{-5}}$	$0.480 \cdot 10^{-5}$	$0.25 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.3. Ergebnisse des FPE-Testes für das Testbeispiel
(Das Minimum wurde unterstrichen)

Die minimalen Werte des FPE-Testes ergaben sich für die Ordnung des Teilmodelles bei $\hat{n}_i = 3$ und für die Ordnungen der Einzelmodelle bei $\hat{n}_{i1} = \hat{n}_{i2} = 2$.

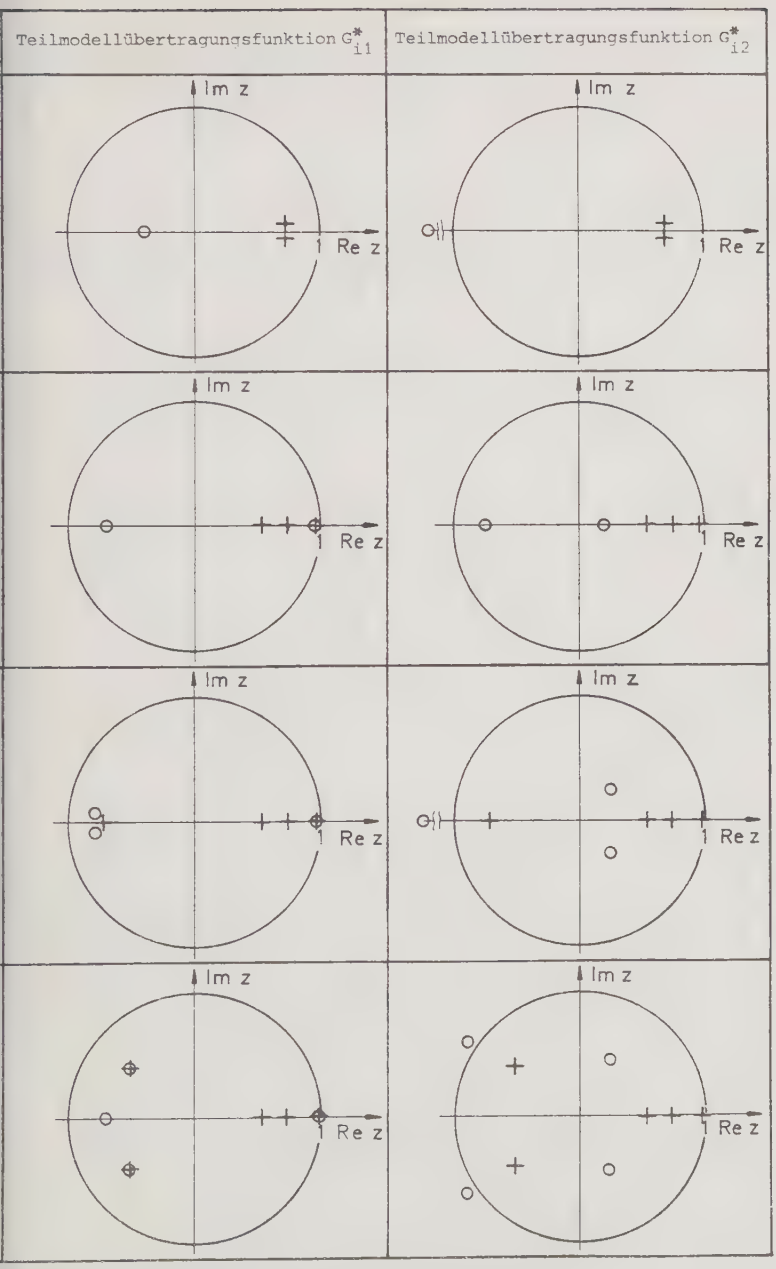
5.4.4 Leistungsfähigkeit des Polynomtestes

Für den Polynomtest wurden zunächst Einzelmodelle mit den Ordnungen $\hat{n}_{ij} = 1$ bis 4 geschätzt, womit sich für das Teilmodell die Ordnungen $\hat{n}_i = 2$ bis 8 ergaben. Danach wurde eine Pol-Nullstellenzerlegung der geschätzten Übertragungsfunktionen durchgeführt.

Beim Teilmodellansatz wurden die Pole des gemeinsamen Nenners und die Nullstellen der erweiterten Zähler in Tabelle 5.4 aufgetragen. Für die Übertragungsfunktion $G^*_{i1}(z)$ des Teilmodells erhält man bei der Ordnung $\hat{n}_i = 3$ zwei reelle Pole bei $\hat{z}_{p1} = 0.53$ und $\hat{z}_{p2} = 0.75$, die auch bei den Übertragungsfunktionen höherer Ordnung auftreten und nicht kompensiert werden. Dagegen werden alle anderen Pole bei den Ordnungen $\hat{n}_i = 3$ bis $\hat{n}_i = 8$ durch Nullstellen kompensiert. Daraus folgt als Ordnung für die Übertragungsfunktion $G^*_{i1}(z)$ $\hat{n}_{i1} = 2$. Für die zweite Übertragungsfunktion $G^*_{i2}(z)$ im Teilmodellansatz sind die Pol-Nullstellenkompensationen nicht so eindeutig, jedoch kann man bei einer groben Kompensation ebenfalls auf die Ordnung $\hat{n}_{i2} = 2$ schließen. Beide Einzelmodelle im Teilmodell werden mit 3 reellen Polen geschätzt, so daß sich als Ordnung des Teilmodells $\hat{n}_i = 3$ ergibt.

Beim Einzelmodellansatz ist die Ordnungsbestimmung $\hat{n}_{i1} = 2$ für die Übertragungsfunktion $\bar{G}_{i1}(z)$ sehr eindeutig (Tabelle 5.5). Auch für die zweite Übertragungsfunktion $\bar{G}_{i2}$ ist die Ordnungsbestimmung nahezu eindeutig, da sich für die Ordnungen $\hat{n}_{i2} = 3$ und $\hat{n}_{i2} = 4$ gegenüber der Ordnung $\hat{n}_{i2} = 2$ keine weiteren, nicht kompensierten Pole ergeben.

Die Ordnungsbestimmung mit Hilfe des Polynomtestes eignet sich somit für den Teilmodellansatz, aber insbesondere für den Einzelmodellansatz sehr gut.



le 5.4. Polynomtest für den Teilmodellansatz

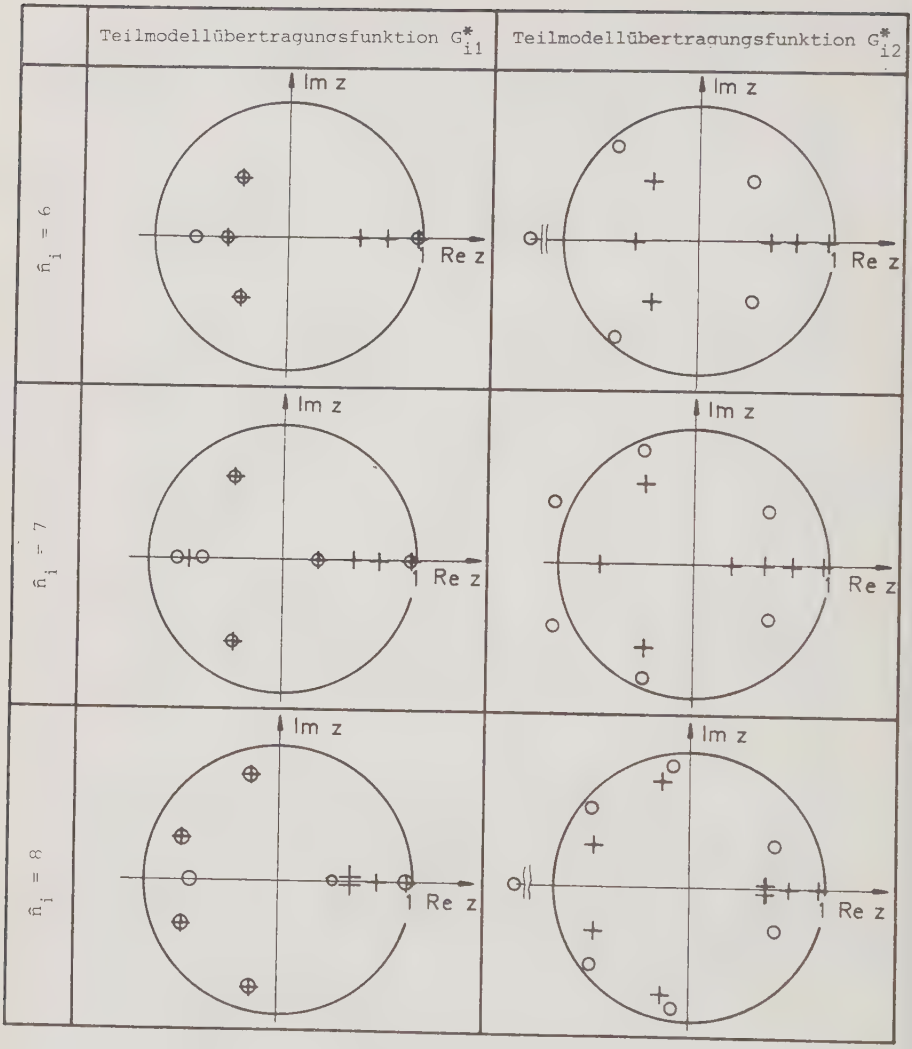
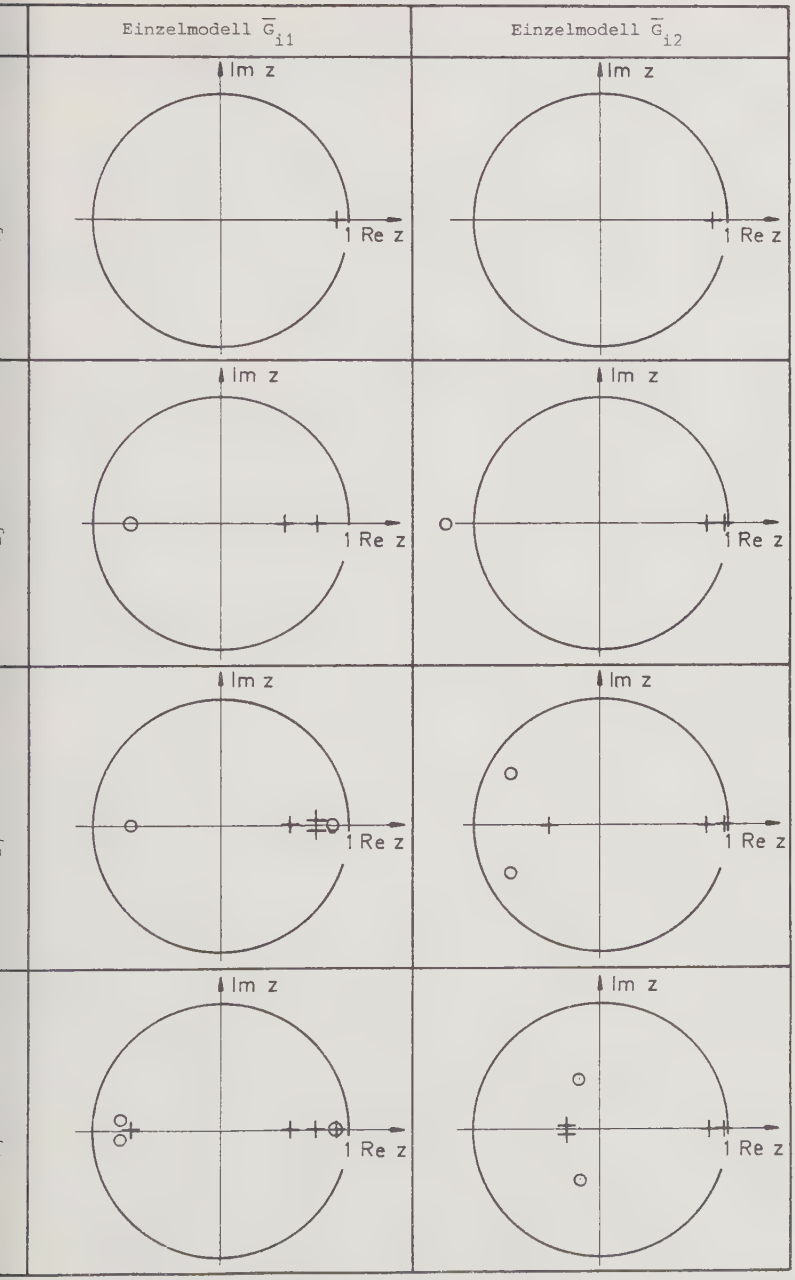


Tabelle 5.4. Polynomtest für den Teilmodellansatz (Fortsetzung)



elle 5.5. Polynomtest für den Einzelmodellansatz

5.4.5 Zusammenfassende Beurteilung

Die Untersuchungen der Anwendbarkeit und der Leistungsfähigkeit der Strukturprüfverfahren für Mehrgrößensysteme haben gezeigt, daß

- die Verfahren zur a priori-Bestimmung der Ordnung für Mehrgrößensysteme nicht oder nur sehr schlecht geeignet sind,
- die Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung bewerten, die Ordnung des Teilmodells bei einer Systemidentifikation und die Ordnungen der Einzelmodelle bei einer Parameteridentifikation sehr gut bestimmen können, und daß
- der Polynomtest ein sehr zuverlässiges Verfahren zur Bestimmung der Ordnungen der Einzelmodelle ist.

Die Ergebnisse der einzelnen Verfahren wurden in Tabelle 5.6 zusammengestellt.

Verfahren	ohne Störung	mit Störung
DR-Test	schlecht	-
EDR-Test	-	schlecht
IDR-Test	-	schlecht
MDR-Test	-	mittel
Signalfehlertest	gut	mittel
Verlustfunktionstest	gut	gut
F-Test	gut	gut
FPE-Test	gut	gut
Polynom-Test	gut	gut

Tabelle 5.6. Vergleich der Strukturprüfverfahren zur Bestimmung der Ordnung von Mehrgrößensystemen

6. Die Identifikation eines Hochofens

Der Hochofenprozeß stellt ein sehr komplexes Mehrgrößensystem dar, für das bisher kaum befriedigende Modelle zur Beschreibung des dynamischen Prozeßablaufes existierten. Derartige Modelle wären aber für den Entwurf und Einsatz automatischer Regelungen eine unbedingte Voraussetzung.

Bisher wurde die wichtigste Teilaufgabe der Regelung des Hochofenprozesses, die Qualitätsregelung des Roheisens, direkt vom Betriebspersonal ausgeführt. Um von dieser Handregelung auf eine automatische Regelung übergehen zu können, muß für den Entwurf und die Realisierung einer Prozeßrechnerregelung ein mathematisches Prozeßmodell entwickelt werden, das den Prozeß hinreichend genau beschreibt. Zwar wurden in den vergangenen Jahren hierzu verschiedenartige Anstrengungen unternommen, die Ergebnisse waren jedoch so bescheiden, daß sie praktisch nicht genutzt werden konnten. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit der Hochofenprozeß als Beispiel eines sehr komplizierten Mehrgrößensystems gewählt, um daran die Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des Teil- und Einzelmodellansatzes zu demonstrieren.

Bevor auf die Untersuchungen eingegangen wird, soll ein kurzer Rückblick auf die bisher entwickelten Modelle gegeben werden. Bereits Mitte der sechziger Jahre erstellten Bogdandy und Wartmann (1965) und Fielden und Wood (1968) ein statisches Modell aufgrund der Auswertung physikalisch-chemischer Gesetzmäßigkeiten. Die Einteilung in infinitesimale Schichten wurde von Michard (1962) und Dovgaljuk (1965) wesentlich vereinfacht, indem sie den Hochofen in 2 Hauptzonen aufteilten. Die bisher besten Ergebnisse statischer Modelle wurden jedoch bei einer Aufteilung in 2 - 7 Zonen (Rist (1964), Langen (1965)) erzielt. Alle Modelle besitzen jedoch den Nachteil, daß sie die Dynamik des Prozesses nicht beschreiben können.

Um die dynamischen Bewegungen zu erfassen, führten Lückers (1967), Benesch (1975) und Rake (1972) eine Korrelationsanalyse durch. Über die Anwendung dieser Verfahren berichten Kapfer (1969) und Ringelband (1970). Der Versuch, ein dynamisches Modell über ein Parameterschätzverfahren zu ermitteln, wurde erstmals von Göhring (1976) und Unbehauen (1976) durchgeführt.

6.1. Der Mehrgrössenmodellentwurf

Ein Modell soll möglichst alle kausalen Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen beschreiben können. Bei einem Hochofen liegt jedoch eine derartig große Anzahl von Meßgrößen vor, daß eine Reduktion auf die wesentlichen Einflußgrößen erforderlich ist. Ein bereits reduziertes, allein nach technischen Gesichtspunkten ausgelegtes Quantitäts-/Qualitätsmodell ist in Bild 6.1 dargestellt. Da die Modellerstellung einer späteren Regelung oder Steuerung dienen soll, können im Bild 6.1 diejenigen Eingangsgrößen, die nicht kurzfristig zu einer Regelung eingesetzt werden, und diejenigen Ausgangsgrößen, die nicht direkt die verbleibenden Stellgrößen beurteilen, vernachlässigt werden. Aus dem noch umfangreichen Quantitäts-/Qualitätsmodell erhält man danach ein einfaches Modell, bei dem nur noch die Windgrößen als Eingänge wirken und die Roheisendaten als Ausgangsgrößen auftreten (Bild 6.2).

Die Roheisenmenge richtet sich allein nach betriebswirtschaftlichen Gesichtspunkten wie Marktlage und Bedarf des Stahlwerks. Sie kann daher in den folgenden Überlegungen für die Erstellung eines Modells für regelungstechnische Zwecke ebenfalls vernachlässigt werden. Von den Größen der Roheisenzusammensetzung ist der Siliziumgehalt der primär zu regelnde Anteil, da zur Stahlweiterverarbeitung ein nahezu konstanter Anteil verlangt wird. Im folgenden sollen daher nur die Roheisentemperatur und der Siliziumgehalt als Ausgangsgrößen betrachtet werden. Entsprechend

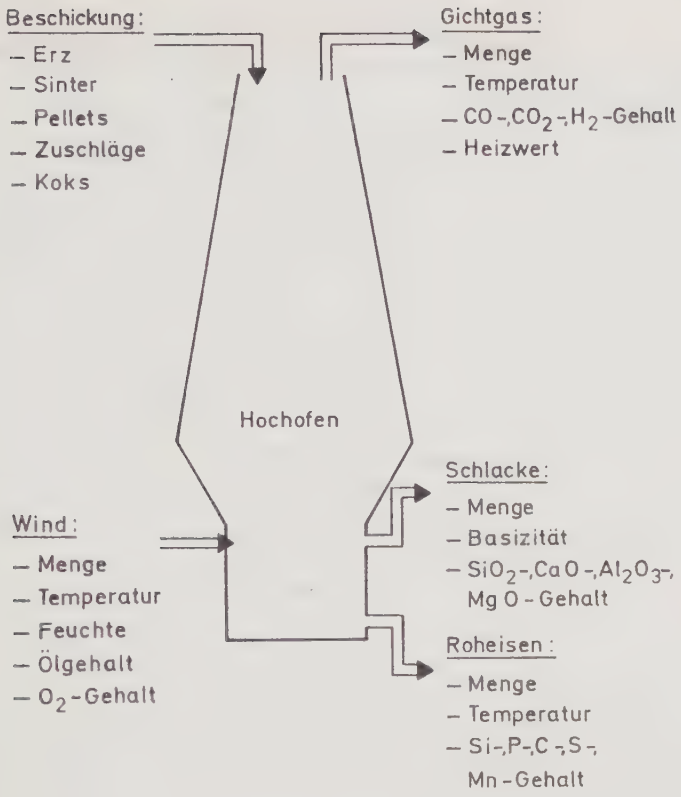


Bild 6.1. Quantitäts-/Qualitätsmodell eines Hochofens

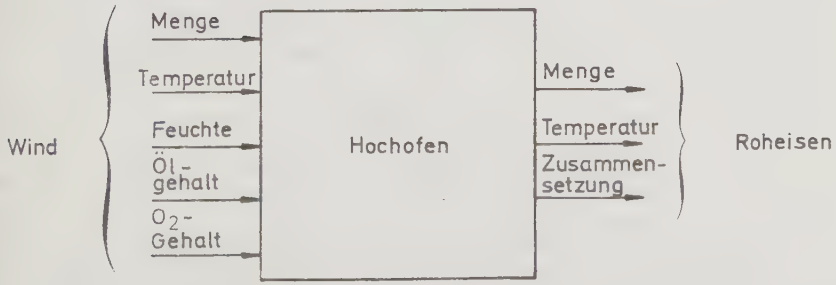


Bild 6.2. Reduziertes Quantitäts-/Qualitätsmodell des Hochofens

der Aufteilung in den Kapiteln 2.2 und 2.3 läßt sich der im Bild 6.3 dargestellte Einzel- bzw. Teilmodellansatz entwerfen.

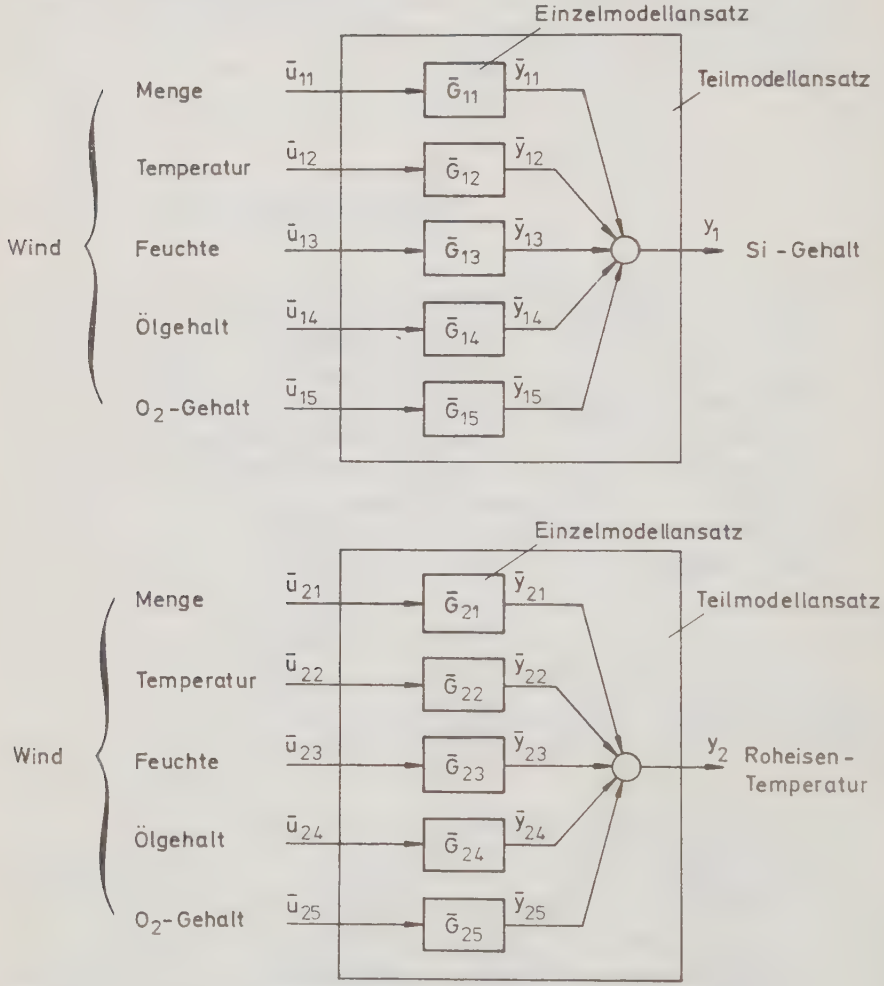


Bild 6.3. Teil- und Einzelmodellansatz des Hochofens

6.2. Versuchsbedingungen und Versuchsauswertung

Die Untersuchungen wurden an dem Hochofen Nr. 1 der Friedrich Krupp Hüttenwerke AG in Duisburg-Rheinhausen durchgeführt. Der Hochofen ist derzeit der drittgrößte in Europa. Die aufgezeichneten Meßreihen mußten aufbereitet werden, um eine geeignete Identifikation zu ermöglichen. Insbesondere war in einigen Meßreihen die Vernachlässigung einzelner Eingangsgrößen notwendig, da sie eine Verschlechterung der Identifikationsergebnisse aufgrund numerischer Schwierigkeiten verursachten. Da keine gesicherten Informationen über die Ordnung vorlagen, wurden die Parameterschätzungen mit den Ordnungen $\hat{n}_{ij}$ = 1,2 und 3 durchgeführt.

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, zu welchen Ergebnissen die Identifikation des Hochofenprozesses mit den verschiedenen Modellansätzen führte. Dies kann aufgrund der umfangreichen Untersuchungen jedoch nur beispielhaft geschehen. Bezüglich einer ausführlichen Darstellung sei auf Domroese (1980) verwiesen.

6.2.1 Die Systemidentifikation mit Hilfe des Modellansatzes II

Wie bereits erwähnt, ist die Systemidentifikation dann als gut zu bezeichnen, wenn das Ausgangssignal möglichst genau vorhergesagt wird. Aus den von Domroese aufgezeigten Ausgangssignalschätzungen für verschiedene Kombinationen von Eingängen unter Verwendung unterschiedlicher Ordnungen wurde ein für die Signalschätzung typisches Ergebnis entnommen (Bild 6.4). Das Bild zeigt die gemessenen und die vorhergesagten Ausgangssignale des Siliziumgehaltes und der Roheisentemperatur. Die vorhergesagten Ausgangswerte berechnen sich nach

$$\hat{y}_i(k) = -a_{1,i}\, y_i(k-1) - \ldots - a_{n_i,i}\, y_i(k-n_i) + b_{11,i}\, \bar{u}_{i1}(k-1) + \ldots + b_{n_i 1,i}\, \bar{u}_{i1}(k-n_i) + b_{12,i}\, \bar{u}_{i2}(k-1) + \ldots + b_{n_i r_i,i}\, \bar{u}_{ir_i}(k-n_i) \tag{6.1}$$

Der vorhergesagte Wert wird also mit den gemessenen Ein- und Ausgangssignalen geschätzt. Die Schätzung kann sowohl für die Silizium- als auch für die Roheisentemperaturvorhersage als sehr gut bezeichnet werden. Die Abweichungen sind geringfügig.

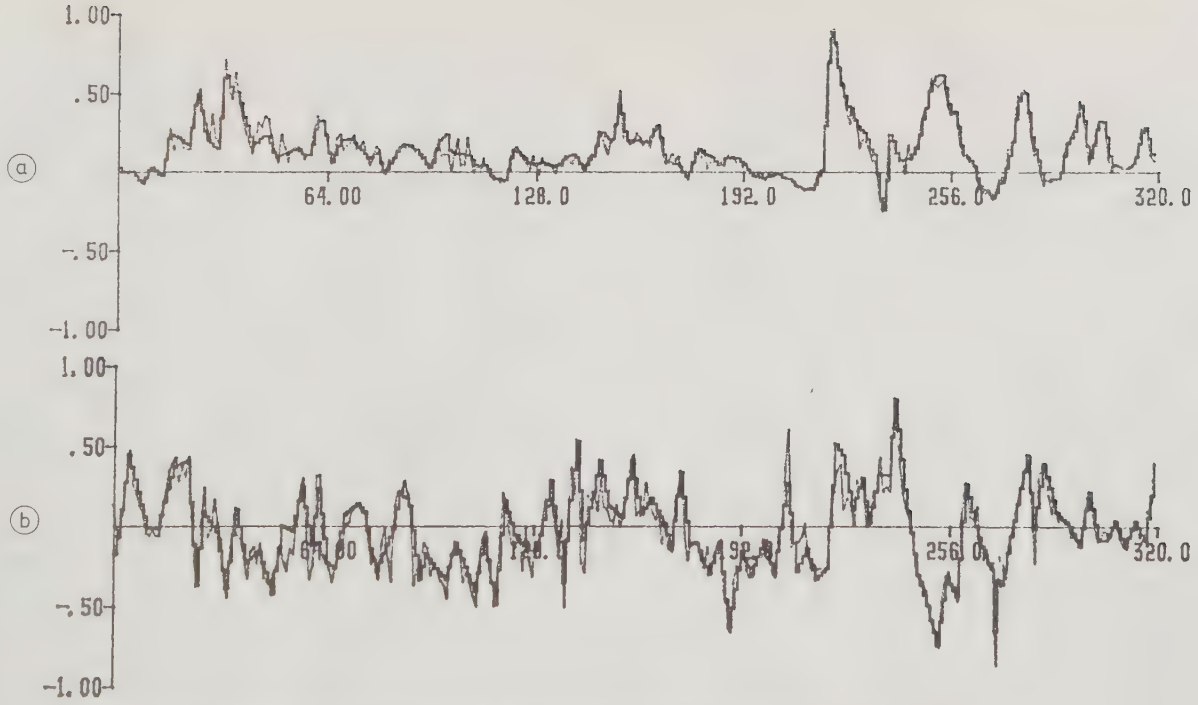


Bild 6.4. Verlauf der gemessenen und der vorhergesagten Ausgangssignale

(a) Siliziumgehalt
(b) Roheisentemperatur

} bei Verwendung der Eingangsgrößen {

- Windmenge
- Windfeuchte
- Windtemperatur
- Ölzusatz

Die Übertragungsfunktionen besaßen alle die Ordnung $\hat{n}_{ij} = 2$. Die Meßreihe bestand aus 320 Meßwerten.

6.2.2 Die Parameteridentifikation mittels des Modellansatzes III

Für die Meßreihe mit dem Siliziumgehalt als Ausgangsgröße wurde auch eine Parameteridentifikation mit dem Modellansatz III durchgeführt. Dieser Modellansatz ist für den späteren Entwurf eines Reglers aufgrund seiner niedrigeren Ordnung besser geeignet. Die Tabelle 6.1 zeigt die Pol-Nullstellenverteilung der geschätzten Übertragungsfunktionen des Teilmodells mit dem Siliziumgehalt als Ausgangsgröße. Ein Gütevergleich ist bei diesem unbekannten

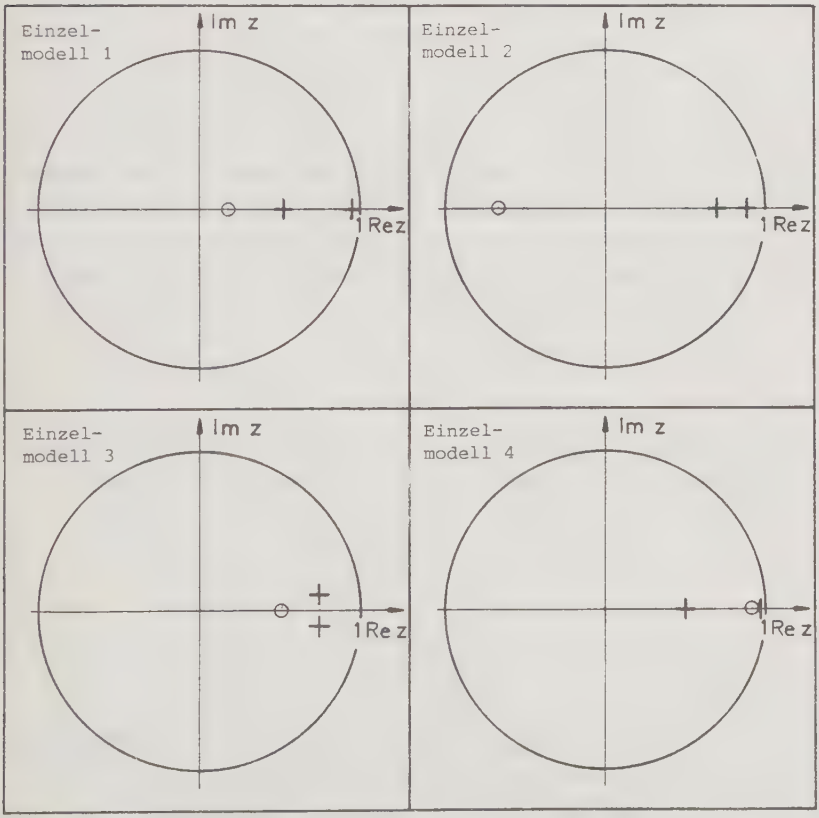


Tabelle 6.1. Pol- und Nullstellenverteilung der Übertragungsfunktionen des Teilmodells mit dem Siliziumgehalt als Ausgangsgröße

System jedoch nur über die Signalschätzung möglich. Der Vergleich des gemessenen Ausgangssignals mit den summierten vier Modellausgangssignalen (Bild 6.5) läßt auf ein gutes Ergebnis der Parameteridentifikation schließen.

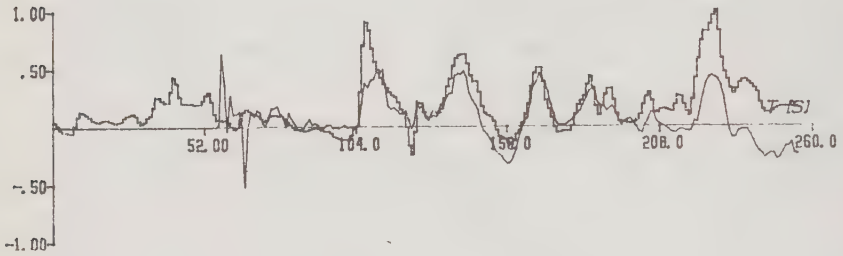


Bild 6.5. Verlauf des gemessenen Siliziumgehaltes und der summierten Ausgangssignale aus den 4 Einzelmodellen. Die Eingangsgrößen waren die Windmenge, die Windfeuchte, die Windtemperatur und der Ölzusatz. Die Einzelmodelle besaßen die Ordnung $\hat{n}_{ij} = 2$. Es wurden 260 Meßwerte verwendet.

Bei einem Vergleich zu Bild 6.4a muß beachtet werden, daß es sich hier um Modellausgangssignale handelt, welche berechnet werden mit

$$\bar{y}_{ij}(k) = -a_{1,ij}\,\tilde{y}_{ij}(k-1) - \ldots - a_{n_{ij},ij}\,\tilde{y}_{ij}(k-n_{ij}) + b_{1,ij}\,\bar{u}_{ij}(k-1) + \ldots + b_{n_{ij},ij}\,\bar{u}_{ij}(k-n_{ij}) \,. \qquad (6.2)$$

Während in Gl.(6.2) die mit dem Signalmodell geschätzten Ausgangssignale der Einzelsysteme verwandt werden, wurde in Gl.(6.1) das gemessene Ausgangssignal des Teilsystemes eingesetzt, wodurch die im gemessenen Signal enthaltenen Störungen bei der Prädiktion des neuen Signales berücksichtigt werden. Auch der Vergleich der do-

minanten Zeitkonstanten der 4 Einzelmodelle mit den Reaktionszeiten, die aufgrund der Erfahrung der Hochofenbetreiber geschätzt wurden, zeigt eine gute Übereinstimmung.

Für den Reglerentwurf können bei Verwendung des Einzelmodellansatzes 4 Übertragungsfunktionen 2. Ordnung statt 4 Übertragungsfunktionen 8. Ordnung des Teilmodellansatzes verwandt werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß eine besondere Schwierigkeit der Mehrgrößenidentifikation darin liegt, für die Identifikation geeignete Meßreihen zu erhalten. Wenn die Dynamik der Ein- und Ausgangssignale nicht genügend groß ist, führt dies zu numerischen Schwierigkeiten im Schätzalgorithmus. Liegen geeignete Meßreihen vor, so sind, wie die vorherigen Kapitel gezeigt haben, sowohl die Identifikationsergebnisse mittels des Teil- als auch mittels des Einzelmodellansatzes sehr zufriedenstellend.

7. Zusammenfassung

Die Erstellung eines Modells ist das wesentliche Ziel der Identifikation von Mehrgrößensystemen. Beim Entwurf müssen die physikalischen Zusammenhänge des Systems erfaßt, die Anwendungszwekke des Modells (Steuer- und Regelgrößen) berücksichtigt und die Identifizierbarkeitsbedingungen beachtet werden. In der vorliegenden Arbeit wurden drei Modellansätze untersucht und verglichen, mit denen ein systematischer Entwurf ermöglicht wird.

Das aus der allgemeinen Form der Zustandsraumbeschreibung hergeleitete *Gesamtmodell* (Modellansatz I) ermöglicht eine nicht unterteilte Modellbildung für Mehrgrößensysteme. Der Nachteil dieses Ansatzes liegt in der großen Zahl der zu identifizierenden Parameter und dem damit verbundenen hohen Rechenaufwand.

Eine Aufteilung des Gesamtmodells in *Teilmodelle* wird in dem Modellansatz II durchgeführt, wobei ein Teilmodell mehrere Eingänge und nur einen Ausgang besitzt. Da die Identifikation der Teilmodelle unabhängig voneinander geschieht, reduziert sich die Anzahl der zu schätzenden Parameter. Anhand zweier simulierter Beispiele wurde gezeigt, daß mit den Teilmodellen die Ausgangssignale sehr gut nachgebildet werden konnten. Trotz dieser guten Systemidentifikation zeigten die Beispiele jedoch auch, daß eine Parameteridentifikation mit den Teilmodellen nicht gewährleistet werden kann.

In dieser Arbeit wird daher eine weitere Aufteilung der Teilmodelle in *Einzelmodelle* (Modellansatz III) vorgeschlagen. Die Einzelmodelle besitzen nur noch einen Ein- und einen Ausgang und ermöglichen die Reduzierung des Mehrgrößenmodells auf eine Parallelschaltung von Eingrößenmodellen. Die untersuchten Beispiele zeigen, daß mit den Einzelmodellen sowohl eine System- als auch eine Parameteridentifikation möglich ist. Dem Vorteil, daß die

geschätzten Einzelmodelle bedeutend weniger Parameter benötigen, steht der Nachteil gegenüber, daß während der Identifikation ein größerer Rechenaufwand erforderlich ist.

Durch die Unabhängigkeit während der Identifikation ergeben sich weitere Vorteile des Einzelmodellansatzes. Besitzen z.B. die Übertragungsfunktionen innerhalb eines Teilmodells ein wesentlich unterschiedliches Zeitverhalten, so ist es nicht möglich, mit *einer* Abtastzeit alle dynamischen Bewegungen des schnellen Einzelsystemes zu erfassen und gleichzeitig numerische Schwierigkeiten bei der Identifikation des langsamen Einzelsystems zu umgehen. Der Einzelmodellansatz erlaubt die Einführung *unterschiedlicher Abtastzeiten*, die jeweils optimal an das Einzelsystem angepaßt werden können. Ebenso können *optimale Wichtungsfaktoren* für die Einzelmodelle gewählt werden. Ferner wird in der Arbeit gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die Identifikation *zeitvarianter Mehrgrößensysteme* mit dem Einzelmodellansatz durchführbar ist.

Um eine Schätzung der wahrscheinlichsten Ordnungen der Übertragungsfunktionen der Teil- und Einzelmodelle zu ermöglichen, wurden *neun Strukturprüfverfahren* auf ihre Leistungsfähigkeit bei der Mehrgrößenidentifikation untersucht. Dabei wurde festgestellt, daß die Verfahren zur a priori-Ermittlung der Ordnungen nicht zu eindeutigen Ergebnissen führten. Hingegen ist mit den Verfahren, die die Ausgangssignalschätzung bewerten, und mit dem Polynomtest eine gute Bestimmung der Ordnungen für die Teil- und die Einzelmodelle möglich.

In dieser Arbeit werden zwei bekannte Modellansätze und ein neu entwickelter Modellansatz untersucht. Mit dem Vergleich der Leistungsfähigkeit soll ein Beitrag dazu geleistet werden, für die Identifikation von Mehrgrößensystemen die Wahl eines geeigneten Modellansatzes in Abhängigkeit vom Verwendungszweck des Modells zu ermöglichen. Anhand simulierter Testbeispiele wird gezeigt, daß die erzielbare Güte der Schätzergebnisse mit denen

aus der Identifikation von Eingrößensystemen vergleichbar ist. Eine theoretische Weiterentwicklung bzw. Modifikation scheint daher nicht erforderlich zu sein.

Das größte (und meist nicht lösbare) Problem bei der Identifikation von Mehrgrößensystemen besteht in der Beschaffung von Meßreihen, in denen zu jedem Zeitpunkt alle Signale genügend erregt werden. Wie die Identifikation des Hochofenprozesses zeigt, sind meist nur sehr wenige, zeitlich stark begrenzte Meßreihen für die Auswertung geeignet. Sind die Prozeßbetreiber bei einer Ein- und einer Ausgangsgröße des Prozesses oft gern bereit, eine ausreichende Bewegung in den Signalen zu erzeugen, scheuen sie die gleichzeitige Variation aller Eingangsgrößen eines Mehrgrößensystems, um den Prozeß für sie stets berechen- und regelbar betreiben zu können. Oftmals kann auch aus technischen Gründen eine Variation aller Signale nicht erfolgen.

Trotz dieser Problematik zeigen die Ergebnisse dieser Arbeit, daß die Identifikation von Mehrgrößensystemen erfolgreich durchgeführt werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

Ackermann, J. (1972), Abtastregelung, Springer-Verlag

Akaike, H. (1969), Fitting autoregressive models for prediction, Ann. Inst. Statist. Math., 21, S. 243-247.

Akaike, H. (1970), Statistical predictor identification, Ann. Inst. Statist. Math., 22, S. 203-217.

Akaike, H. (1978), On newer statistical approaches to param. est. and structure determination, IFAC-Weltkongreß Helsinki, S. 1877-1884.

Åström, K.J., Eykhoff, P. (1971), System identification - a survey. Automatica, 7, S. 123-162.

Bauer, B. (1977), Parameterschätzverfahren zur on-line Identifikation dynamischer Systeme im offenen und geschlossenen Regelkreis, Diss. Ruhr-Universität Bochum.

Benesch, R. (1975), Untersuchung dynamischer Zusammenhänge zwischen einigen den Hochofenprozeß charakterisierenden Kenngrößen, Archiwum Hutnictwa 20, Nr. 2, S. 185-192.

Bogdandy, L.v., Wartmann, R. (1965), Rechnerische Erfassung der Erzreduktion im Gegenstrom als Grundlage eines mathematischen Hochofenmodells, Internationale Eisenhüttentagung, Amsterdam, B-1.

Budin, M.A. (1971), Minimal realization of discrete linear systems from input-output observation. IEEE Tr. AC, 16, S. 395-401.

Budin, M.A. (1972), A new approach to system identification, IEEE Tr. SMC, 2, S. 396-402.

Diekmann, K., Unbehauen, H. (1979a), Recursive Identification of Multi-Input, Multi-Output Systems, IFAC Symp. Darmstadt, FRG.

Diekmann, K., Unbehauen, H. (1979b), A New Method for Non-Redundant Parameter Estimation of Multi-Input, Multi-Output Systems, Proceedings MECO '79, Grenoble.

Domroese, C. (1980), Entwicklung eines regeldynamischen Modells für einen Hochofen, Lehrst. Elektr. Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum, Diplomarbeit ESR 8003.

Dovgaljuk, B.P. (1965), Ein System zur Regulierung des Wärmezustands des Hochofens', STAL, Heft 3, S. 225-228.

Fielden, C.J., Wood, B.I. (1968), A Dynamic Digital Simulation of the Blast Furnace, Journal of the Iron and Steel Inst., S. 650-658.

Gauthier, A., Landau, I.D. (1978), On the Recursive Identification of Multi-Input, Multi-Output Systems, Automatica, 14, S. 609-614.

Göhring, B. (1973), Erprobung statistischer Parameterschätzmethoden und Strukturprüfverfahren zur exp. Ident. von Regelsystemen, Diss. Universität Stuttgart.

Göhring, B., Bauer, B. (1976), Vergleich verschiedener Verfahren zur Analyse eines auf Stoff- und Wärmebilanzen basierenden Hochofenmodelles, Regelungstechnik, Heft 2, S. 42-46.

Goodwin, G.C., Payne, R.L., Kabaila, P. (1976), On Canonical Forms and Algorithms for Multivariable Time Series Analysis. IV. IFAC Symposium Tiflis.

Gopinath, B. (1969), On the identification of linear time-invariant systems from input-output data, Bell System Techn. J., 48, S. 1101-1113.

Guidorzi, R. (1975), Canonical structure in the identifications of multivariable systems, Automatica, 11, S. 361-398.

Gupta, R.D., Fairman, F.W. (1974), Parameter estimation for multivariable systems, IEEE Tr. AC, 19, S. 546-549.

Kapfer, E., Steeb, R. (1969), Prozeßrechner im Hochofenwerk, Siemens-Zeitschrift 43, Heft 9, S. 728-732.

Keviczky, L.K., Bányász, Cs.M. (1976), Some New Results on Multiple Input - Multiple Output Identification Methods, IFAC Symp. Tbilisi, USSR.

Kopacek, P. (1978), Identifikation zeitvarianter Regelsysteme, Vieweg-Verlag.

Kreuzer, W. (1977), Parameteridentifikation bei linearen zeitvarianten Systemen, Diss. Universität Karlsruhe.

Langen, F.V. (1965), Automatisierung eines Hochofens, Internationale Eisenhüttentagung, Amsterdam, B-6.

Lückers, J. (1967), Experimental Study of Blast Furnace Dynamics, Centre National Recherche Métallurgie, Nr. 10, S. 11-20.

Ljung, L., Morf, M., Falconer, D. (1978), Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes, Int. J. Control, V. 27, No. 1, S. 1-19.

Mehra, R.K. (1970), Maximum-Likelihood identification of aircraft parameters, JACC Atlanta, S. 442-444.

Mesarović, M.D. (1960), The control of multivariable systems, Wiley, New York.

Michard, J. (1962), Etude du Haut Fourneau, Internationale Eisenhüttentagung, Luxemburg.

Morgner, W. (1978), Off-line Parameterschätzung von Mehrgrößensystemen mittels der Maximum-Likelihood-Methode, Ruhr-Universität Bochum, Lehrst. Elektr. Steuerung und Regelung, Diplomarbeit ESR-7814.

Passeri, D.P., Herget, C.J. (1972), Parameter identification of a class of multiple input / multiple output linear discrete-time systems, JACC Stanford, S. 786-793.

Rake, H. (1972), Korrelationsanalyse von Betriebsmeßwerten eines Hochofens, Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung, 20, S. 10-12.

Ringelband, W., Schoppa, H., Winzer, D., Wiethoff, G. (1970), Regelung mit Prozeßrechner am Hochofen III der Hoesch AG Hüttenwerke, Werk Phoenix, Internationale Eisenhüttentagung, Luxemburg, B-4.

Rist, A., Meyson, M. (1964), Recherche graphique de la mise au mille minimale du haut fourneau á faible température de vent, Revue de Métallurgie, Nr. 2, S. 122-145.

Sachs, L. (1978), Angewandte Statistik, Springer-Verlag.

Schenk, R., Scheurer, H.G. (1976), Vergleich einiger moderner Parameterschätzverfahren, Regelungstechnik 24, Nr. 1, S. 11-19.

Schulz, G. (1975), Maximum-Likelihood identification mittels Kalman Filterung, DFVLR, Rep. 75-54.

Sen, A., Sinha, N.K. (1976), On-line estimation of the parameters of a multivariable system using matrix pseudo inverse, Int. J. Systems SCI., V.7, S. 461-471.

Sinha, N.K., Kwong, Y.H. (1977), Recursive Identification of the parameters of a multivariable system, 4th IFAC Symp. 'Multivariable Technological Systems', Fredericton, Canada, S. 323-327.

Söderström, T. (1977), On model structure testing in system ident., Int. J. Control, 26, S. 1-18.

Unbehauen, H., Göhring, B. (1973), Application of different statistical tests for the determination of most accurate order of the model in param. est., IFAC Symp. Hague, p.TS-1.

Unbehauen, H., Göhring, B., Bauer, B. (1974a), Parameter Schätzverfahren zur Systemidentifikation, Oldenbourg-Verlag.

Unbehauen, H., Göhring, B. (1974b), Tests for determining model order in parameter estimation, Automatica, 10, S. 233-244.

Unbehauen, H., Göhring, B. (1976), Application of the extended Maximum Likelihood Method for the identification of a blast furnace, Automatic Control Theory and Applications, Vol. 4, Nr. 3.

Wellstead, P.E. (1978), An Instrumental Product Moment Test for Model Order Estimation, Automatica, V.14, S. 89-91.

Woodside, C.M. (1971), Estimation of the order of linear systems, Automatica, V.7, S. 727-733.

Young, P., Jakeman, A., Mc Murtrie, R. (1980), An Instrumental Variable Method for Model Order Identification, Automatica, V.16, S. 281-294.

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

A	Nennerpolynom für die Modellübertragungsfunktion mit den Koeffizienten a_i
A^*	Polynom des gemeinsamen Nenners verschiedener Modellübertragungsfunktionen mit den Koeffizienten a_i^*
B	Zählerpolynom für die Modellübertragungsfunktion mit den Koeffizienten b_i
B^*	Aufgrund der gemeinsamen Nennerbildung erweitertes Zählerpolynom für die Modellübertragungsfunktion mit den Koeffizienten b_i^*
C	Zählerpolynom der Übertragungsfunktion G_R mit den Koeffizienten c_i
D	Nennerpolynom der Übertragungsfunktion G_R mit den Koeffizienten d_i
d_{ij}	Totzeit der Übertragungsfunktion G_{ij}
DR	Determinantenverhältniszahl
$E,e,\underline{e}$	Gleichungsfehler, Gleichungsfehlervektor
$E_A,e_A,$	Ausgangsfehler
EDR	Determinantenverhältniszahl des EDR-Testes
f	Frequenzfaktor
F	Testgröße des F-Testes
FPE	Wert des FPE-Testes
G	Übertragungsfunktion
$\overline{G}$	Übertragungsfunktion der Teil- und Einzelmodelle
G^*	Gewichtungsmatrix
h	Übergangsfunktion
I	Fehlerfunktion
IDR	Determinantenverhältniszahl des IDR-Testes
k	diskrete Zeitvariable
$\underline{k}_i$	Bewertungsvektor
m	Anzahl der Systemausgänge
$\underline{m},\underline{M}$	Signalvektor, Signalmatrix
MDR	Determinantenverhältniszahl des MDR-Testes

n	Modellordnungen
N	Anzahl der Meßwerte
p	Anzahl der Parameterwerte
$\underline{p}$	Parametervektor
$\underline{P}$	Kovarianzmatrix der Schätzfehler
$\underline{q}$	Bewertungsvektor
$\underline{Q}$	Datenmatrix
r	Anzahl der Systemeingänge
r_i	Anzahl der Teilmodelleingänge
R_i	Kovarianzmatrix der Störung z
s	komplexe Variable $s = \sigma + j\omega$
S	Anzahl der zu schätzenden Parameter
T	Abtastzeit
$U, u, \underline{u}$	Eingangssignal, Eingangsvektor
$\overline{U}, \overline{u}, \overline{\underline{u}}$	Eingangssignal der Teil- und Einzelmodelle
$v, \underline{v}$	korreliertes Fehlersignal, Fehlersignalvektor
V	Verlustfunktion
$\underline{w}, \underline{W}$	Hilfsvariablenvektor, Hilfsvariablenmatrix
Y, y	Ausgangssignal des Systemes
$\overline{Y}, \overline{y}$	Ausgangssignal der Einzelmodelle
$\tilde{Y}, \tilde{y}$	Ausgangssignal des Signalschätzmodells
y_H	Hilfsvariable
z	komplexe Variable $z = e^{sT}$
z_i	Störgröße
σ	Varianz des Fehlers
ρ	Wichtungsfaktor
$(\hat{\cdot})$	Schätzwert
$\det(\cdot)$	Determinante

Anhang A: Nicht rekursive und rekursive Form der Schätzgleichungen

A 1: Die Schätzgleichungen der LS- und der 3. EM-Methode

Die Parameterschätzverfahren basieren auf der Beurteilung des Gleichungsfehlers. Dieser war als Differenzengleichung für die LS-Methode in Gl.(3.1) und für die 3. EM-Methode in Gl.(3.6) definiert worden. Mit dem Meßwertvektor $\underline{m}_i$, Gl.(3.3) bzw. Gl.(3.7), und dem Parametervektor $\hat{\underline{p}}_i$, Gl.(3.5) bzw. Gl.(3.8), kann die Differenzengleichung für beide Verfahren einheitlich geschrieben werden mit

$$e_i(k) = y_i(k) - \underline{m}_i^T(k)\ \hat{\underline{p}}_i(k-1) \quad . \tag{A 1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die geschätzten Modellparameter mit den Systemparametern übereinstimmen, ist dann am größten, wenn der Fehler $e_i(k)$ über N aufeinanderfolgende Messungen von $k = n_i + 1$ bis $k = n_i + N$ minimal wird. Die Fehler über N Messungen seien im Fehlervektor

$$\underline{e}_i^T = [e_i(n_i + 1),\ \ldots,\ e_i(n_i + N)] \tag{A 2}$$

zusammengefaßt. Mit den Abkürzungen

$$\underline{M}_i^T = [\underline{m}_i^T(n_i + 1),\ \ldots,\ \underline{m}_i^T(n_i + N)]\ , \tag{A 3}$$

$$\underline{y}_i^T = [y_i(n_i + 1),\ \ldots,\ y_i(n_i + N)] \text{ und} \tag{A 4}$$

$$\hat{\underline{p}}_i^T = [\hat{\underline{p}}_i^T(n_i\ ,\ \ldots\ ,\ \hat{\underline{p}}_i^T(n_i + N-1)] \tag{A 5}$$

lautet Gl.(A 1) über N-Messungen

$$\underline{e}_i = \underline{y}_i - \underline{M}_i^T \cdot \hat{\underline{p}}_i \quad . \tag{A 6}$$

Zur stärkeren Wichtung der größeren Gleichungsfehler wird als Gütefunktional die quadratische Fehlerfunktion

$$I_i(\hat{\underline{p}}_i) = \frac{1}{2}\, \underline{e}_i^T \underline{e}_i = \frac{1}{2} \sum_{k=n_i+1}^{n_i+N} e_i^2(k) \tag{A 7}$$

aufgestellt. Das Minimum von $I_i(\hat{\underline{p}}_i)$ erhält man durch Nullsetzen der partiellen Ableitung von I_i nach $\hat{\underline{p}}_i$. Daraus folgt bei Verwendung des Modellansatzes II die rekursive Lösungsgleichung der LS- und der 3. EM-Methode zu

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_i = \left[\underline{M}_i^T \cdot \underline{M}_i\right]^{-1} \underline{M}_i^T \underline{y}_i \quad .} \tag{A 8}$$

Als Schätzgleichung der beiden Verfahren bei Verwendung des Modellansatzes III folgt in einer entsprechenden Herleitung

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_{ij} = \left[\underline{M}_{ij}^T \cdot \underline{M}_{ij}\right]^{-1} \underline{M}_{ij}^T \tilde{\underline{y}}_{ij} \quad .} \tag{A 9}$$

Für die Herleitung des rekursiven Schätzalgorithmus wird von der Schätzgleichung (A 8) für den k-ten Schritt ausgegangen

$$\hat{\underline{p}}_i(k) = \left[\underline{M}_i^T(k)\ \underline{M}_i(k)\right]^{-1} \underline{M}_i^T(k)\ \underline{y}_i(k) \quad . \tag{A 10}$$

Werden in dieser Gleichung der Meßwertvektor um die Meßwerte für den (k+1)-ten Schritt, $y_i(k+1)$ und $\bar{u}_{i1}(k+1)$ bis $\bar{u}_{ir_i}(k+1)$, und der Ausgangsvektor um das Ausgangssignal $y_i(k+1)$ erweitert, lautet die Schätzgleichung für den (k+1)-ten Schritt

$$\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \left[\underline{M}_i^T(k+1)\ \underline{M}_i(k+1)\right]^{-1} \underline{M}_i^T(k+1)\ \underline{y}_i(k+1) \quad . \tag{A 11}$$

Mit der Abkürzung

$$\underline{P}_i(k+1) = \left[\underline{M}_i^T(k+1)\ \underline{M}_i(k+1)\right]^{-1} \qquad \text{(A 12)}$$

läßt sich, wie in Unbehauen (1974a) gezeigt wurde, die rekursive Schätzgleichung umformen zu

$$\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \hat{\underline{p}}_i(k) + \underline{P}_i(k+1)\ \underline{m}_i(k+1)\left[y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\ \hat{\underline{p}}_i(k)\right] . \qquad \text{(A 13)}$$

Der neue Parametervektor entsteht also durch die Addition eines Korrekturtermes zu dem alten Parametervektor. Um die Invertierung bei der Berechnung der Matrix $\underline{P}_i(k+1)$ zu umgehen, wird die Schätzgleichung umgeformt (siehe wiederum Unbehauen (1974a)) zu

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \hat{\underline{p}}_i(k) + \underline{q}_i(k+1)\left[y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\ \hat{\underline{p}}_i(k)\right]} \qquad \text{(A 14)}$$

mit

$$\underline{q}_i(k+1) = \underline{P}_i(k)\ \underline{m}_i(k+1)\left[1 + \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k)\ \underline{m}_i(k+1)\right]^{-1} . \qquad \text{(A 15)}$$

Die rekursive Berechnung der Matrix $\underline{P}_i(k)$ lautet

$$\underline{P}_i(k+1) = \underline{P}_i(k) - \underline{q}_i(k+1)\ \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k) . \qquad \text{(A 16)}$$

Die Gln.(A 14), (A 15) und (A 16) stellen den gesuchten rekursiven Lösungsalgorithmus dar. Bei entsprechender Herleitung ergeben sich für den Modellansatz III die Schätzgleichungen

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_{ij}(k+1) = \hat{\underline{p}}_{ij}(k+1) + \underline{q}_{ij}(k+1)\left[\tilde{y}_{ij}(k+1) - \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \hat{\underline{p}}_{ij}(k)\right]} \qquad \text{(A 17)}$$

mit

$$\underline{q}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{m}_{ij}(k+1)\left[1 + \underline{m}_{ij}^{T}(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{m}_{ij}(k+1)\right]^{-1} \tag{A 18}$$

$$\underline{P}_{i}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k) - \underline{q}_{ij}(k+1)\ \underline{m}_{ij}^{T}(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)\ . \tag{A 19}$$

A 2: Die Schätzgleichungen für die IV-Methode

Um den systematischen Schätzfehler der LS-Methode, entstanden durch den korrelierten Gleichungsfehler e_i, zu vermeiden, wird die Fehlerfunktion in Gl.(A 7) erweitert zu

$$I_i(\hat{\underline{p}}_i) = \frac{1}{2}\ \underline{e}_i^{T}\ \underline{W}_i\ \underline{W}_i^{T}\ \underline{e}_i\ . \tag{A 20}$$

Dabei bezeichnet man

$$\underline{W}_i = \begin{bmatrix} \underline{w}_i^{T}(n+1) \\ \vdots \\ \underline{w}_i^{T}(n+N) \end{bmatrix} \tag{A 21}$$

als Hilfsvariablenmatrix, für die folgende Bedingungen gelten müssen:

$$p\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\ \underline{W}_i^{T}\ \underline{M}_i \quad \text{regulär} \tag{A 22}$$

und

$$p\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\ \underline{W}_i^{T}\ \underline{e}_i = \underline{0}\ . \tag{A 23}$$

Als direkte Lösungsgleichung für die IV-Methode erhält man damit

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_i = \left[\underline{W}_i^T \underline{M}_i\right]^{-1} \underline{W}_i^T \underline{y}_i} \qquad \text{(A 24)}$$

bzw. in entsprechender Herleitung für den Modellansatz III

$$\boxed{\hat{\underline{p}}_{ij} = \left[\underline{W}_{ij}^T \underline{M}_{ij}\right]^{-1} \underline{W}_{ij}^T \tilde{\underline{y}}_{ij} \cdot} \qquad \text{(A 25)}$$

Die rekursiven Schätzgleichungen können entsprechend der Herleitung der LS-Methode mit der Abkürzung

$$\underline{P}_i(k+1) = \left[\underline{W}_i^T(k+1)\ \underline{M}_i(k+1)\right]^{-1} \qquad \text{(A 26)}$$

bestimmt werden zu (siehe Bauer (1977))

$$\hat{\underline{p}}_i(k+1) = \hat{\underline{p}}_i(k) + \underline{q}_i(k+1)\left[y_i(k+1) - \underline{m}_i^T(k+1)\ \hat{\underline{p}}_i(k)\right] \qquad \text{(A 27)}$$

mit

$$\underline{q}_i(k+1) = \underline{P}_i(k)\ \underline{w}_i(k+1)\left[1 + \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k)\ \underline{w}_i(k+1)\right]^{-1} \qquad \text{(A 28)}$$

$$\underline{P}_i(k+1) = \underline{P}_i(k) - \underline{q}_i(k+1)\ \underline{m}_i^T(k+1)\ \underline{P}_i(k) \ . \qquad \text{(A 29)}$$

Für den Modellansatz III lauten die Schätzgleichungen entsprechend

$$\hat{\underline{p}}_{ij}(k+1) = \hat{\underline{p}}_{ij}(k) + \underline{q}_{ij}(k+1)\ \left[\tilde{y}_{ij}(k+1) - \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \hat{\underline{p}}_{ij}(k)\right] \qquad \text{(A 30)}$$

mit

$$\underline{q}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\ \left[1 + \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k)\ \underline{w}_{ij}(k+1)\right]^{-1} \qquad \text{(A 31)}$$

$$\underline{P}_{ij}(k+1) = \underline{P}_{ij}(k) - \underline{q}_{ij}(k+1)\ \underline{m}_{ij}^T(k+1)\ \underline{P}_{ij}(k) \ . \qquad \text{(A 32)}$$

Die Hilfsvariablen im Hilfsvariablenvektor

$$\underline{w}_i^T(k+1) = \left[-y_{H,i}(k-1),\ldots,-y_{H,i}(k-n_i) \,\vdots\, \bar{u}_{i1}(k-1),\ldots,\bar{u}_{ir_i}(k-n_i) \right] \tag{A 33}$$

werden über ein Hilfsmodell, welches die Parameter $\underline{p}_{H,i}$ besitzt, bestimmt durch

$$y_{H,i}(k) = \underline{w}_i^T(k)\ \underline{p}_{H,i}(k) \ . \tag{A 34}$$

Die Bestimmung der Hilfsmodellparameter kann aus (Bauer (1977)) entnommen werden.

Anhang B: Der Berechnungsalgorithmus von Ljung, Morf und Falconer

Der Algorithmus basiert auf dem Grundgedanken, in Gl.(A 13) die Matrix $\underline{P}_i(k+1)$ und den Vektor $\underline{m}_i(k+1)$ nicht getrennt rekursiv zu berechnen, sondern nur den Vektor

$$\underline{k}_i(k+1) = \underline{P}_i(k+1)\ \underline{m}_i(k+1) \ . \qquad \text{(B 1)}$$

Der Vorteil besteht darin, die sehr speicherplatzintensive Matrix $\underline{P}_i$ nicht explizit berechnen zu müssen. Bezüglich der Herleitung des Algorithmus sei auf die Originalliteratur verwiesen. Es werden im folgenden nur die Berechnungsgleichungen für das Teilmodell i hergeleitet.

Um die rekursive Berechnung zu erleichtern, wird der Meßwertvektor $\underline{m}_i$ nicht nach den Signalgrößen, sondern nach den Meßzeitpunkten geordnet

$$\underline{m}_i^T(k) = \Big[-y_i(k-1), \bar{u}_{i1}(k-1), .., \bar{u}_{ir_i}(k-1) \,\Big|\, -y_i(k-2), \bar{u}_{i1}(k-2), .., \bar{u}_{ir_i}(k-2)$$

$$\Big| \ldots \Big| -y_i(k-n_i), \bar{u}_{i1}(k-n_i), \ldots, \bar{u}_{ir_i}(k-n_i) \Big] \qquad \text{(B 2)}$$

$$\underline{m}_i^T(k) = \Big[\underline{\xi}_i(k-1) \,\Big|\, \underline{\xi}_i(k-2) \,\Big|\, \ldots \,\Big|\, \underline{\xi}_i(k-n_i)\Big] \ . \qquad \text{(B 3)}$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\underline{k}(1) = \underline{0}, \quad \underline{A}(0) = \underline{0}, \quad \underline{\Sigma}(0) = \delta I, \quad \underline{D}(0) = 0$$

lautet der Berechnungsalgorithmus (Indizierung i vernachlässigt)

$$\underline{\varepsilon}_o(k) = \underline{\xi}(k) + \underline{A}^T(k-1)\ \underline{m}(k) \tag{B 4}$$

$$\underline{A}(k) = \underline{A}(k-1) - \underline{k}(k)\ \underline{\varepsilon}_o^T(k) \tag{B 5}$$

$$\underline{\varepsilon}(k) = \underline{\xi}(k) + \underline{A}^T(k)\ \underline{m}(k) \tag{B 6}$$

$$\underline{\Sigma}(k) = \underline{\Sigma}(k-1) + \underline{\varepsilon}(k)\ \underline{\varepsilon}_o^T(k) \tag{B 7}$$

$$\overline{\underline{k}}(k) = \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}^{-1}(k)\ \underline{\varepsilon}(k) \\ \underline{k}(k) + \underline{A}(k)\ \underline{\Sigma}^{-1}(k)\ \underline{\varepsilon}(k) \end{pmatrix}. \tag{B 8}$$

Diesen Vektor teilt man in die Vektoren

$$\overline{\underline{k}}(k) = \begin{pmatrix} \underline{x}(k) & n_i + (r_i+1) \text{ Elemente} \\ \hline \underline{\mu}(k) & (r_i+1) \text{ Elemente} \end{pmatrix} \tag{B 9}$$

auf. Damit lautet die weitere Berechnung

$$\underline{n}_o(k) = \underline{\xi}(k-n_i) + \underline{D}^T(k-1)\ \underline{m}(k+1) \tag{B 10}$$

$$\underline{D}(k) = \left[\underline{D}(k-1) - \underline{x}(k)\ \underline{n}_o^T(k)\right]\left[\underline{I} - \underline{\mu}(k)\ \underline{n}_o^T(k)\right]^{-1} \tag{B 11}$$

$$\underline{k}(k+1) = \underline{x}(k) - \underline{D}(k)\ \underline{\mu}(k)\ . \tag{B 12}$$

Die Anwendung dieser Berechnungsart für $\underline{k}_i$ ist aufgrund der internen Berechnungsgrößen und deren Speicherplatzbedarf nur für Mehrgrößensysteme mit mehreren Eingängen und einer größeren Ordnung n_i zweckmäßig. Dann jedoch ergeben sich große Vorteile bezüglich des Speicherplatzes und der Rechenzeit.

Bei der IV-Methode ergibt sich folgende Modifikation der Bestimmungsgleichungen:

$$\underline{w}_i^T(k) = \left[-y_{H,i}(k-1), \bar{u}_{i1}(k-1), \ldots, \bar{u}_{ir_i}(k-1) \,\middle|\, -y_{H,i}(k-2), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \,\middle|\, \ldots \bar{u}_{ir_i}(k-n_i) \right] \qquad \text{(B 13)}$$

$$\underline{w}_i^T(k) = \left[\underline{\zeta}(k-1) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \underline{\zeta}(k-n_i) \right] \qquad \text{(B 14)}$$

$$\underline{\varepsilon}_o(k) = \underline{\zeta}(k) + \underline{A}^T(k-1)\ \underline{w}(k) \qquad \text{(B 15)}$$

$$\underline{A}(k) = \underline{A}(k-1) - \underline{k}(k)\ \underline{\varepsilon}_o^T(k) \qquad \text{(B 16)}$$

$$\underline{C}(k) = \underline{C}(k-1) + \underline{w}(k)\ \underline{\xi}^T(k) \qquad \text{(B 17)}$$

$$\underline{\varepsilon}(k) = \underline{\xi}(k) - \underline{C}^T(k)\ \underline{k}(k)\ . \qquad \text{(B 18)}$$

Die Gleichungen (B 7), (B 8), (B 9), (B 11) und (B 12) können unverändert übernommen werden, lediglich Gl.(B 10) wird wie folgt modifiziert:

$$\underline{\eta}_o(k) = \underline{\zeta}(k-n_i) + \underline{D}^T(k-1)\ \underline{w}(k+1)\ . \qquad \text{(B 19)}$$

Es kann der Anfangswert $\underline{C}(0) = \underline{0}$ angenommen werden.

Klaus Diekmann

Bochum, den 17. Dezember 1980

Lebenslauf

14.3.1951	geboren in Bochum
1957 - 1961	Volksschule in Bochum
1961 - 1970	Math.-naturwiss. Gymnasium in Bochum
1970 - 1971	Wehrdienst
1971 - 1976	Studium an der Ruhr-Universität Bochum, Fachrichtung Maschinenbau
1973	Praktikum bei der Firma Hoesch, Dortmund
Seit 1976	Wissenschaftlicher Mitarbeiter / Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum
1976	Eheschließung mit Barbara Schulze Schwienhorst